



Universidade Federal  
de São João del-Rei

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGF

---

## **EFEITOS DA GEOMETRIA NA CAMINHADA DO CUPIM**

---

MESTRADO EM FÍSICA

*Candidata:*

*Orientadora:*

---

Gabryelly Monyque Machado

---

Leticia Ribeiro de Paiva

Ouro Branco, MG  
6 de setembro de 2022

Gabryelly Monyque Machado

PROJETO DE PESQUISA PPGF

---

**EFEITOS DA GEOMETRIA NA CAMINHADA DO CUPIM**

---

MESTRADO EM FÍSICA

Dissertação submetida ao Programa de Pós Graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Leticia Ribeiro de Paiva

Coorientador: Prof. Dr. Sidiney Geraldo Alves,

Ouro Branco, MG

6 de setembro de 2022

Este trabalho é dedicado aos meus colegas de classe e aos meus queridos pais.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à Deus por me conduzir durante todo o mestrado. Agradeço aos meus pais Jaime e Cláudia, minha irmã Sophia, e meus amigos do trabalho, por todo o apoio e paciência.

À minha orientadora Dra. Leticia Ribeiro de Paiva que me acompanhou durante esses anos e meu coorientador Prof. Dr. Sidiney Geraldo Alves.

Agradecimento em especial minhas amigas Maria Alice, Natália, Luana e demais colegas de mestrado assim como o grupo de pesquisa coordenado pela professora Letícia que me ajudou muito ao longo do mestrado.

E agradeço a UFSJ.

"Lute com determinação, abrace a vida com paixão, perca com classe e vença com ousadia. O mundo pertence a quem se atreve e a vida é muito para ser insignificante." Charles Chaplin

Não se amoldem ao padrão deste mundo, mas transformem-se pela renovação da sua mente, para que sejam capazes de experimentar e comprovar a boa, agradável e perfeita vontade de Deus. (Romanos 12:2)

## RESUMO

O forrageamento é frequentemente entendido como um processo de busca biológica onde os objetos que estão sendo buscados podem ser considerados sítios alvos. Podemos descrever quantitativamente a eficiência em localizar sítios alvos espalhados aleatoriamente usando ideias de passeios aleatórios. Os padrões de movimentos gerados por esses passeios aleatórios em diferentes geometrias serão analisados de forma direta por meio de filmagem, sendo esta convertida para gerar dados necessários à análise por meio da física estatística, em uma trajetória típica usando modelo de caminhante aleatório, a partir do movimento de um cupim operário. O movimento é o principal mecanismo pelo qual os animais interagem com o meio, esses movimentos geram padrões espaços-temporais muito complexos, sendo assim, utilizaremos cupins do gênero *Cornitermes* spp., por questão de praticidade e disponibilidade, tendo em vista também que eles são insetos sociais, que vivem organizados em grupos, interagindo entre si, numa relação ecológica harmônica denominada sociedade. Os resultados indicam que os cupins testados exibem superdifusão e vôos de Lévy em todas as geometrias estudadas, mesmo na ausência de estímulos ou pistas externas.

**Palavras-chave:** difusão. MDS. trajetória.

## ABSTRACT

Foraging is often understood as a biological search process where the objects being searched for can be considered target sites. We can quantitatively describe the efficiency of locating randomly scattered target sites using random walk ideas. The movement patterns generated by these random walks in different geometries will be analyzed directly through filming, which will be converted to generate data necessary for analysis through statistical physics, in a typical trajectory using a random walker model, from the movement of a worker termite. Movement is the main mechanism by which animals interact with the environment, these movements generate very complex spatio-temporal patterns, so we will use termites of the genus *Cornitermes* spp., for reasons of practicality and availability, also considering that they are social insects, which live organized in groups, interacting with each other, in a harmonious ecological relationship called society. The results indicate that the tested termites exhibit superdiffusion and Lévy flights in all studied geometries, even in the absence of external stimuli or cues.

**Keywords:** diffusion. MSD. trajectory.

## LISTA DE FIGURAS

|           |   |    |
|-----------|---|----|
| Figura 1  | A faixa central mostra a distribuição geográfica de cupins encontrados normalmente em regiões tropicais. [1] . . . . .  | 2  |
| Figura 2  | Cupinzeiro <i>Cornitermes spp.</i> . Fonte: Foto tirada no campus . . . . .   | 3  |
| Figura 3  | Organização Social. [2] . . . . .   | 4  |
| Figura 4  | Ciclo de vida do cupim. Fonte: <a href="http://www.doutorcupim.com/p/biologia.html">http://www.doutorcupim.com/p/biologia.html</a> . . . . .  | 5  |
| Figura 5  | Diferentes estrutura de ninho. [3] . . . . .  | 6  |
| Figura 6  | Estrutura do ninho - diferente vistas. [4] . . . . .  | 7  |
| Figura 7  | Modelo biotectônico. [5] . . . . .  | 8  |
| Figura 8  | Para compreender as interações ecológicas que existem na natureza, faz-se necessário considerar a relação que existe entre fenômenos de pequena e grande escala em um ambiente físico. Em pequenas escalas, padrões comportamentais possuem um papel predominante, e detalhadas descrições físicas são particularmente relevantes. No entanto, como ocorre em vários outros sistemas complexos, os detalhes que são relevantes em pequenas escalas (como os padrões físicos e comportamentais dos indivíduos considerados) se tornam menos importantes a medida que consideramos médias em longas escalas espaciais e temporais. Neste caso, a interação entre dimensões, escalas e flutuações é o que mais determina os padrões estatísticos médios, que pode ser capturado por um pequeno número de variáveis relevantes (desenho por Ricard Solé) [6]. . . . . | 9  |
| Figura 9  | Grãos de pólen (grandes círculos) da planta <i>Clarkia pulchella</i> , observados no microscópio flutuando na água em constante movimento (agitação térmica) devido a colisões com moléculas de água (pequenos círculos). [2] . . . . .   | 12 |
| Figura 10 | MSD e diferentes categorias de difusão. Fonte: <a href="http://fiscomp.if.ufrgs.br">fiscomp.if.ufrgs.br</a> . . . . .   | 14 |
| Figura 11 | Caminhada Aleatória Unidimensional - O movimento é considerado completamente aleatório. Fonte: desenho criado pela autora. . . . .  | 15 |
| Figura 12 | Trajetórias bidimensionais de passeios aleatórios em grandes escalas. Esquerda: Passeio aleatório comum com variância finita e bem definida de passos simples. Direita: A trajetória de voo de Lévy de índice $\alpha = 1$ . [7] . . . . .  | 21 |
| Figura 13 | Para um caminhante aleatório que dá passos de tamanho $l$ de acordo com a função densidade de probabilidade $P(l) \sim l^{-\mu}$ , o tipo de difusão depende do valor de $\mu$ . Para $\mu > 3$ , o TCL garante a convergência para a difusão normal. O limite balístico corresponde à $\mu \rightarrow 0$ . Para $\mu \leq 1$ , $P(l)$ não é normalizável. Valores intermediários, isto é, $1 < \mu < 3$ resultam em voos de Lévy superdifusivos. [8] . . . . .  | 22 |

|           |  |    |
|-----------|--|----|
| Figura 14 | Para uma distribuição lei de potência $P(l) \sim l^{-\mu}$ de passos ou tamanho de passos $l$ momentos superiores não existem. Especificamente, o momento de ordem $\mu - 1$ diverge logaritmicamente com limite superior, e todos momentos superiores divergem como alguma potência de limite superior. Momentos inferiores permanecem finitos. Momentos divergentes são uma consequência das propriedades de invariância de escala: sistemas livre de escala não tem características de escalas bem definidos. [8] . . . . . | 22 |
| Figura 15 | Ponte de Königsberg. Fonte:Adaptado de wikipedia.org . . . . .   | 24 |
| Figura 16 | Redes regulares de diferentes dimensionalidades. (a) Rede de cadeia linear infinita em uma dimensão de grau $k = 2$ , (b) rede hexagonal infinita em duas dimensões de grau $k = 3$ , (c) rede cubica em três dimensões com grau $k = 6$ . As arestas vermelhas ressaltam o grau característico da rede regular. [9] . . . . .   | 25 |
| Figura 17 | Exemplo de duas redes aleatórias formadas com valores de probabilidade diferentes e $N = 27$ . (a) Rede aleatória conexa gerada com $\rho > \ln N = N$ (b) Rede aleatória desconexa gerada com $\rho < \ln N = N$ , as arestas em cor preta ressaltam as partes onde a rede aleatória é desconexa. [9] . . . . .   | 26 |
| Figura 18 | Ilustração da caminhada de Lévy governada pela distribuição de passos definida na equação (3.37). Os três exemplos mostram caminhadas percorrendo a distância total de 1000 unidades, note como $\mu$ , o expoente da lei de potência afeta a frequência dos deslocamentos com tamanho muito superior à média. No limite $\mu \rightarrow 1$ , observa-se superdifusão enquanto $\mu \rightarrow 3$ , recupera o comportamento Browniano. [8] . . . . .  | 27 |
| Figura 19 | Modelo de busca aleatória: (a) se um sítio-alvo (quadrado preto) está localizado dentro de um raio de visão $r_v$ , então o buscador se move em linha reta até ele; (b) caso contrário, o buscador escolhe uma direção aleatória e um comprimento de passo $l_j$ a partir de uma distribuição $p(l)$ e incrementa seu deslocamento, procurando continuamente por um sítio dentro de um raio $r_v$ ao longo de sua trajetória. [8] . . . . .  | 29 |
| Figura 20 | Três condições de contorno no caso de uma rede triangular livre de defeitos: (a) periódica, (b) helicoidal e (c) parede não especular . [10] . . . . .   | 30 |
| Figura 21 | Cupins operários e soldados. . . . .   | 32 |
| Figura 22 | Molde de estrutura para caminhada quase 1D - A largura $d$ é um pouco maior que as dimensões do cupim, sendo assim, a caminhada é aproximadamente unidimensional. . . . .  | 33 |
| Figura 23 | Molde de estrutura de transição. . . . .   | 34 |
| Figura 24 | Molde de Labirinto . . . . .   | 34 |

|           |  |    |
|-----------|--|----|
| Figura 25 | Equipamentos - Em (a) local onde ocorreu a gravação dos experimentos em túneis como também alguns de moldes circulares. Em (b) caixa de isopor onde a maior parte dos experimentos com moldes circulares foram realizados. Fonte: foto retirada pela autora . . . . .  | 35 |
| Figura 26 | Representação de um caminhante aleatório contínuo no tempo. [2] . . .  | 40 |
| Figura 27 | Experimento 515, Em (a) trajetória no anel circular ( $r = 5\text{cm}$ , $R = 6.25\text{cm}$ .) de espessura de 1.5 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ .  | 45 |
| Figura 28 | Experimento 515f, Em (a) trajetória no anel circular ( $r = 5\text{cm}$ , $R = 6.25\text{cm}$ .) de espessura de 1.5 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ . | 45 |
| Figura 29 | Experimento 515d, Em (a) trajetória no anel circular ( $r = 5\text{cm}$ , $R = 6.25\text{cm}$ .) de espessura de 1.5 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ . | 46 |
| Figura 30 | Experimento 515e, Em (a) trajetória no anel circular ( $r = 5\text{cm}$ , $R = 6.25\text{cm}$ .) de espessura de 1.5 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ . | 46 |
| Figura 31 | Experimento 515c, Em (a) trajetória no anel circular ( $r = 5\text{cm}$ , $R = 6.25\text{cm}$ .) de espessura de 1.5 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ . | 47 |
| Figura 32 | Experimento 147, Em (a) trajetória no labirinto, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ . . . . .   | 47 |
| Figura 33 | Experimento 201, Em (a) trajetória no labirinto, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ . . . . .   | 48 |
| Figura 34 | Experimento 503, Em (a) trajetória no labirinto, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ . . . . .   | 48 |

|           |  |    |
|-----------|--|----|
| Figura 35 | Experimento 503a, Em (a) trajetória no labirinto, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ . . . . .  | 49 |
| Figura 36 | Experimento 503b, Em (a) trajetória no labirinto, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ . . . . .  | 49 |
| Figura 37 | Experimento 508, Em (a) trajetória no anel circular de espessura 2 cm ( $r = 4.5$ , $R = 6.25$ ), histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ . . . . .  | 50 |
| Figura 38 | Experimento 508a, Em (a) trajetória no anel circular de espessura 2 cm ( $r = 4.5$ , $R = 6.25$ ), histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ . . . . . | 50 |
| Figura 39 | Experimento 508b, Em (a) trajetória no anel circular de espessura 2 cm ( $r = 4.5$ , $R = 6.25$ ), histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ . . . . . | 51 |
| Figura 40 | Experimento 508c, Em (a) trajetória no anel circular de espessura 2 cm ( $r = 4.5$ , $R = 6.25$ ), histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ . . . . . | 51 |
| Figura 41 | Experimento 508d, Em (a) trajetória no anel circular de espessura 2 cm ( $r = 4.5$ , $R = 6.25$ ), histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ . . . . . | 52 |
| Figura 42 | Experimento 520b, Em (a) trajetória na placa de petri ( $R = 4.5$ ), histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ . . . . .                               | 52 |
| Figura 43 | Experimento 523b, Em (a) trajetória na placa de petri ( $R = 4.5$ ), histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ . . . . .                               | 53 |

|           |  |    |
|-----------|--|----|
| Figura 44 | Experimento 520d, Em (a) trajetória na placa de petri ( $R = 4.5$ ), histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ . | 53 |
| Figura 45 | Experimento 520g, Em (a) trajetória na placa de petri ( $R = 4.5$ ), histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ . | 54 |
| Figura 46 | Experimento 521, Em (a) trajetória na placa de petri ( $R = 4.5$ ), histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ .  | 54 |
| Figura 47 | Experimento 509, Em (a) trajetória túnel de espessura 1 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ .          | 55 |
| Figura 48 | Experimento 509a, Em (a) trajetória túnel de espessura 1 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ .         | 55 |
| Figura 49 | Experimento 509b, Em (a) trajetória túnel de espessura 1 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ .         | 56 |
| Figura 50 | Experimento GM2, Em (a) trajetória túnel de espessura 1 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ .          | 56 |
| Figura 51 | Experimento GM3, Em (a) trajetória túnel de espessura 1 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ .          | 57 |
| Figura 52 | Experimento 506d, Em (a) trajetória túnel de espessura 1.5 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ .       | 57 |

|           |  |    |
|-----------|--|----|
| Figura 53 | Experimento 504, Em (a) trajetória túnel de espessura 1.5 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ .  | 58 |
| Figura 54 | Experimento 506f, Em (a) trajetória túnel de espessura 1.5 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ . | 58 |
| Figura 55 | Experimento 506e, Em (a) trajetória túnel de espessura 1.5 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ . | 59 |
| Figura 56 | Experimento GM3, Em (a) trajetória túnel de espessura 1.5 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ .  | 59 |
| Figura 57 | Experimento 506a, Em (a) trajetória túnel de espessura 2 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ .   | 60 |
| Figura 58 | Experimento 506b, Em (a) trajetória túnel de espessura 2 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ .   | 60 |
| Figura 59 | Experimento 506c, Em (a) trajetória túnel de espessura 2 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ .   | 61 |
| Figura 60 | Experimento 511d, Em (a) trajetória túnel de espessura 2 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ .   | 61 |
| Figura 61 | Experimento GM, Em (a) trajetória túnel de espessura 2 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem $q$ .     | 62 |

## LISTA DE TABELAS

|          |   |    |
|----------|---|----|
| Tabela 1 | Dados Experimentais criados para pesquisa. . . . .  | 36 |
| Tabela 2 | Dados Experimentais. . . . .  | 38 |
| Tabela 3 | Valores de $\mu$ , utilizando diferentes métodos, referentes ao experimentos<br>circulares. . . . .   | 43 |
| Tabela 4 | Valores de $\mu$ , utilizando diferentes métodos, referentes ao experimentos<br>retangulares. . . . . | 44 |

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

|      |   |
|------|---|
| TLC  | Teorema do Limite Central                               |
| CTRW | <i>do inglês, Continuous-Time Random Walk</i>           |
| MSD  | <i>do inglês, Mean Square Displacement</i>              |
| D    | Constante de Difusão                                    |
| PDF  | <i>do inglês, Probability Density Function</i>          |
| SRW  | <i>do inglês, Simple Isotropic Random Walk model</i>    |
| FP   | Fokker-Planck   |
| FFPE | equação fracionária de Fokker-Planck                    |
| LRW  | <i>do inglês, Lévy Random Walks</i>                     |
| PBC  | <i>do inglês, Boundary Conditions Periodic</i>          |
| HBC  | <i>do inglês, Boundary Conditions Helical</i>           |
| WBC  | <i>do inglês, Boundary Conditions not Specular Wall</i> |

## SUMÁRIO

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .               | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>INTERFACE COM A BIOLOGIA</b> . . . . . | <b>2</b>  |
| 2.1      | INSETOS SOCIAS . . . . .                  | 2         |
| 2.2      | GEOMETRIA DOS NINHOS . . . . .            | 6         |
| <b>3</b> | <b>FÍSICA DO FORRAGEAMENTO</b> . . . . .  | <b>9</b>  |
| 3.1      | CAMINHADA ALEATÓRIA . . . . .             | 12        |
| 3.2      | CAMINHADA DE LEVY . . . . .               | 19        |
| <b>4</b> | <b>REDES COMPLEXAS</b> . . . . .          | <b>24</b> |
| 4.1      | <b>OBJETIVO</b> . . . . .                 | 31        |
| <b>5</b> | <b>METODOLOGIA</b> . . . . .              | <b>32</b> |
| <b>6</b> | <b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b> . . . . .  | <b>38</b> |
| <b>7</b> | <b>CONCLUSÕES</b> . . . . .               | <b>63</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .              | <b>64</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

O forrageamento é frequentemente entendido como um processo de busca biológica onde os objetos que estão sendo buscados podem ser considerados (sítios alvos). Podemos descrever quantitativamente a eficiência em localizar sítios alvos espalhados aleatoriamente usando ideias de caminhadas aleatórias [11]. Com exceção dos humanos, os sinais de forrageamento mais sofisticados de comunicação capazes de indicar a localização e a qualidade da fonte de alimento são exibidos em insetos eusociais. O termo eusocial é aplicado a grupos ou espécies que possuem três características: cuidado cooperativo com o grupo, superposição de gerações e divisão reprodutiva de trabalho [12].

O movimento é o principal mecanismo pelo qual os animais interagem com o meio, esses movimentos geram padrões espaço-temporais muito complexos, cujas análises são importantes para uma compreensão adequada dos mecanismos ecológicos fundamentais da dispersão dos indivíduos ou da expansão e crescimento de suas populações. Os organismos terrestres traçam trajetórias contínuas durante seu movimento, que geralmente são compostas por curvas e “loops” muito sinuosos que refletem a complexidade envolvida no movimento [13]. O monitoramento de pequenos animais (cupins, formigas, etc) pode ser feito na natureza ou em experimentos planejados e sob condições controladas de laboratório; manter registros das posições espaciais de cada indivíduo em intervalos regulares ao longo do tempo é um método comum na literatura [2].

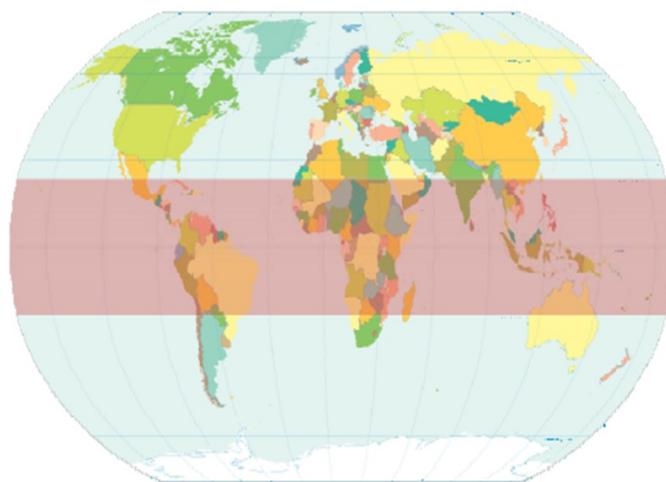
Um dos aspectos que desperta interesse, devido à importância em sistemas reais é a relação entre topologia e processos dinâmicos. O estudo deste relacionamento pode ser usado para verificar propriedades estruturais que influenciam comportamentos dinâmicos, permitindo antecipar e, conseqüentemente, prevenir efeitos indesejados no sistema. Um processo temporal relativamente simples e flexível muito popular em diversas áreas da ciência que possibilita o estudo topológico de redes é o passeio aleatório (random walk) [14]. Modelos de caminhadas aleatórias são muito utilizados em uma grande variedade de processos estocásticos, que são um conjunto de variáveis aleatórias usadas para estudar a evolução temporal de um sistema [15]. Em 1900, Louis Bachelier em sua tese de doutorado propôs o uso da dinâmica aleatória como um modelo fundamental para séries temporais financeiras, ideia que influenciou muitas décadas depois a teoria moderna das finanças [16]. Alguns anos depois, 1905, Karl Pearson utilizou o random walk para descrever de forma simples uma infestação de mosquitos em uma floresta através de uma distribuição estatística [17]. No mesmo ano, Albert Einstein elaborou o movimento Browniano para explicar o complicado movimento de uma partícula suspensa no ar, que foi modelado como um passeio aleatório guiado por colisões com um gás molecular [18]. Com o passar dos anos, a caminhada aleatória se mostrou muito útil em outras áreas, por exemplo, na biologia com o estudo de estruturas e dinâmicas de polímeros, na computação com algoritmos de buscas e na matemática com fractais e grafos regulares de diferentes dimensões espaciais. No contexto de redes complexas, o passeio aleatório consiste em um caminhante visitando vértices consecutivos escolhidos aleatoriamente entre todos os vizinhos do vértice atual [14].

## 2 INTERFACE COM A BIOLOGIA

### 2.1 INSETOS SOCIAIS

Insetos sociais são considerados sistemas biológicos complexos e estruturados por numerosas interações entre seus membros, que vivem em sociedades e apresentam divisão de trabalho (reprodução, defesa, busca por alimento). Tais características estão diretamente relacionadas com o extraordinário sucesso ecológico e evolutivo alcançado por esses insetos, notáveis pela grande diversidade, abundância e ampla distribuição na maioria dos ecossistemas terrestres [19]. Interações entre indivíduos que compõem grupos sociais geram uma gama de comportamentos não apresentados em uma escala individual. Uma das manifestações mais básicas desse fenômeno é a facilitação social, definida como padrões usuais de comportamento que são iniciados ou aumentados no espaço ou amplificados pela presença ou ação de outros animais. O processo de facilitação social pode ser encontrado em humanos, caranguejos, abelhas, escorpiões, formigas e cupins entre outros [20].

Os mecanismos de forrageamento dos cupins, por terem recursos de comunicação limitados e por construírem galerias de forrageamento altamente complexas e organizadas, se tornam objeto de grande interesse científico [1]. Os cupins são insetos sociais da ordem Isoptera, que contém cerca de 2800 espécies descritas no mundo. São os invertebrados dominantes em ambientes terrestres tropicais e estão espalhados desde as florestas úmidas até as savanas, sendo encontrados até mesmo em regiões áridas, como pode ser observado na figura 1.



**Figura 1:** A faixa central mostra a distribuição geográfica de cupins encontrados normalmente em regiões tropicais. [1]

A explicação para essa extraordinária abundância advém da existência da simbiose com microorganismos, além de uma organização social bastante desenvolvida.

A família Termitidae compreende aproximadamente 70% de todas as espécies da ordem Isoptera no mundo, com 1.900 das 2.800 espécies descritas, e é a família mais diversa, abundante e especializada. Três subfamílias de Termitidae são reconhecidas: Apicotermatinae, Termitinae e Nasutitermitinae. Os Nasutitermitinae apresentam a distribuição geográfica mais ampla e a maior diversidade de espécies entre os cupins superiores. Esta subfamília possui soldados com mecanismos de defesa química e/ou física, devido aos hábitos subterrâneos de muitas espécies. Os cupins precisam de um certo grau de umidade, que obtêm no solo onde vivem ou, em casos extremos, em seu metabolismo [2].

A figura 2 mostra um cupinzeiro, essa estrutura facilita a ocupação por outras espécies, devido à presença de galerias vazias internamente.

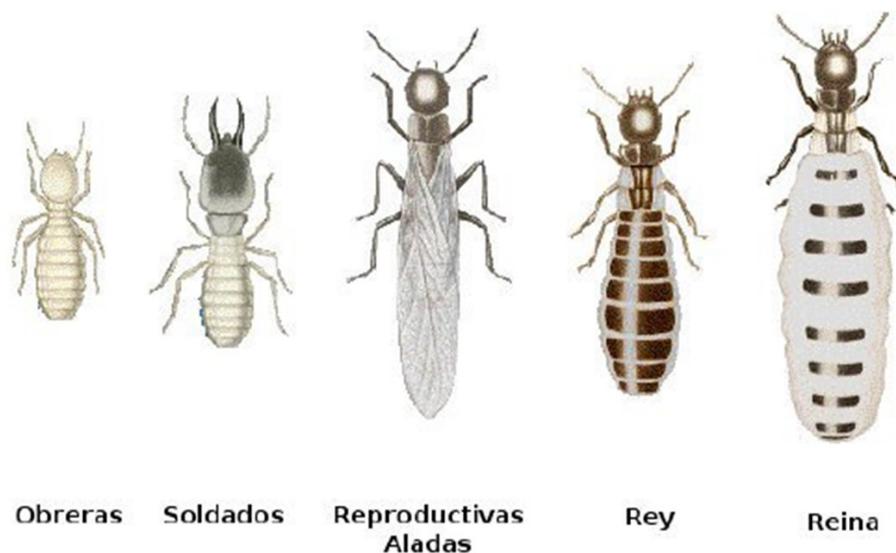


**Figura 2:** Cupinzeiro *Cornitermes* spp. Fonte: Foto tirada no campus

Os cupins são insetos eussociais, caracterizados por apresentar três características bem definidas, sobreposição de gerações, divisão de trabalho e cooperação no cuidado com a prole. As colônias de insetos sociais tipicamente contêm entre dezenas e milhões de indivíduos, que podem exibir algum grau de plasticidade comportamental. Apesar disso, as colônias são coordenadas de modo a funcionar como unidades ecológicas coesas. Dos atributos que definem a eussocialidade, a divisão de trabalho é o principal responsável pelo sucesso ecológico dos insetos sociais. A estrutura rígida dos ninhos dá proteção para as colônias e constitui um micro-habitat isolado, mantendo o controle da umidade e termorregulação no interior das galerias. Dentre as espécies que coabitam os cupinzeiros, há outras espécies de cupins inquilinos e diversos termitófilos

ocasionais ou permanentes, tais como formigas, outros artrópodes e vertebrados. Além disso, a alocação de atividades em uma colônia é um fator-chave para a estruturação das sociedades de insetos. A forma de divisão de trabalho (polietismo) mais fundamental está relacionada à reprodução. A comunicação social pode ocorrer por meio de canais sensoriais diversos, como o visual, o acústico, o tátil, o magnético e o químico, sendo este último, a modalidade de comunicação mais difundida entre os insetos, particularmente nas espécies sociais [21].

A organização social dos cupins é constituída por indivíduos morfologicamente distintos, agrupados em castas, que desempenham funções específicas dentro da colônia. Há basicamente três tipos de castas: operários, soldados e reprodutores, ilustrados na figura 3.



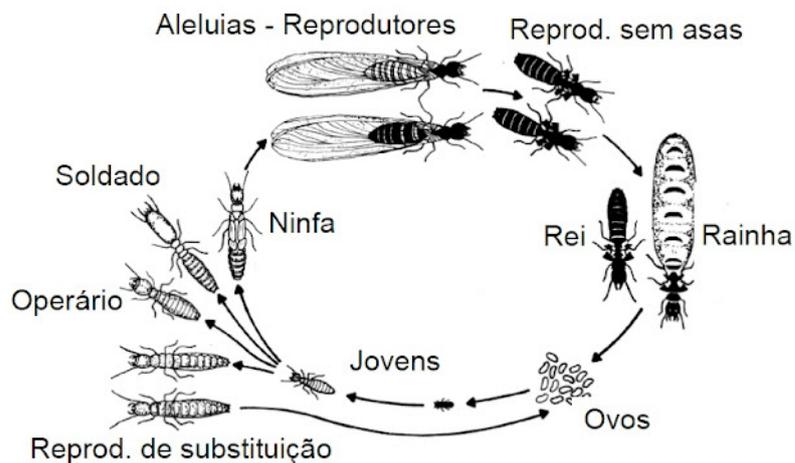
**Figura 3:** Organização Social. [2]

Os operários representam a casta mais numerosa da colônia, são responsáveis pela construção, reparo e limpeza dos ninhos, cuidados com os ovos e recém-nascidos, forrageamento e até pela defesa da colônia, são incumbidos também da alimentação das outras castas [22].

Os soldados são incumbidos basicamente da defesa do ninho e proteção dos operários durante o forrageamento, mas também podem atuar como agentes de recrutamento de operários quando um recurso alimentar é encontrado. As armas utilizadas na defesa são basicamente as mandíbulas e/ou substâncias químicas produzidas principalmente pela glândula frontal, localizada na cápsula cefálica. A presença de uma ou de outra arma de defesa, ou até mesmo de ambas, vai depender da espécie. As mandíbulas são utilizadas para cortar ou desmembrar os opositores, enquanto as substâncias químicas são tóxicas e/ou pegajosas. Nem todas as espécies de cupins possuem soldados, algumas utilizam apenas os operários como agentes de defesa da colônia. Os alados possuem dois pares de asas membranosas, sendo popularmente conhecidos como siriris ou aleluias, e serão os futuros reprodutores da colônia, também chamados de reis e rainhas. Os alados são geralmente liberados durante a estação chuvosa. Neste período, é comum encontrá-los

pelo chão durante o dia, depois de uma chuva, ou voando ao redor de pontos de iluminação à noite [22].

Nessa dinâmica os reprodutores alados se preparam para deixar o ninho a fim de instituir outra colônia. Os trabalhadores, por outro lado, nunca deixam o ninho, exceto para forragear por comida. Eles são o esteio da colônia e seus papéis são numerosos. Eles forrageiam por comida e por água, para construir e reparar estruturas da colônia e cuidar dos cupins que não atingiram a maturidade, como também dos reprodutores alados, rei e rainha. Os soldados têm apenas um trabalho: defender a colônia, e particularmente a rainha e o rei. Esta descrição simples da estrutura de casta é complicada para algumas espécies que não têm soldados e outras que não têm operários [23]. Todas as espécies de cupins têm um ou outro, dessa forma, todas as espécies de cupins são eussociais, porque possuem pelo menos uma casta estéril que é pré-determinada durante os estágios imaturos [22]. A figura 4 acima mostra o ciclo de vida dos cupins, sendo este semelhante em todos os cupins.

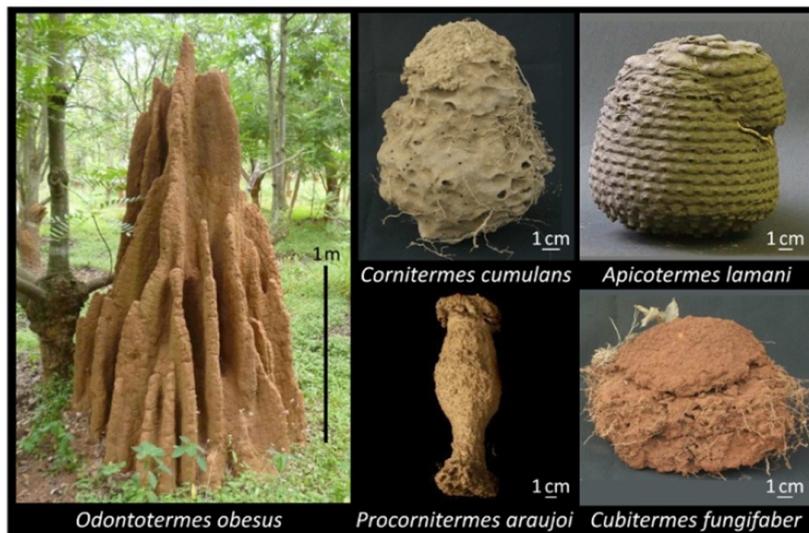


**Figura 4:** Ciclo de vida do cupim. Fonte: <http://www.doutorcupim.com/p/biologia.html>

Um único indivíduo dentro da colônia de cupins não se comporta como um inseto solitário padrão. Ao separá-lo da colônia ele morrerá, mesmo os “alados”, que podem sobreviver por algum tempo longe do ninho, precisam emparelhar e formar uma nova colônia para sobreviver. Operários e soldados não têm trato reprodutivo; soldados e reprodutores não podem se alimentar sozinhos; operários e reprodutores geralmente não podem se defender com eficácia; soldados e operários não podem se dispersar. Essas funções, reprodução, alimentação, defesa e dispersão, são todas, por necessidade, combinadas em um inseto solitário. Isso leva à ideia de que uma colônia de cupins é o indivíduo e, portanto, ao conceito de superorganismo. Um superorganismo é definido como uma coleção de agentes que podem agir em conjunto para produzir fenômenos governados pelo coletivo [24]. O conceito de superorganismo não se restringe aos cupins, outros insetos eussociais podem ser definidos da mesma maneira.

## 2.2 GEOMETRIA DOS NINHOS

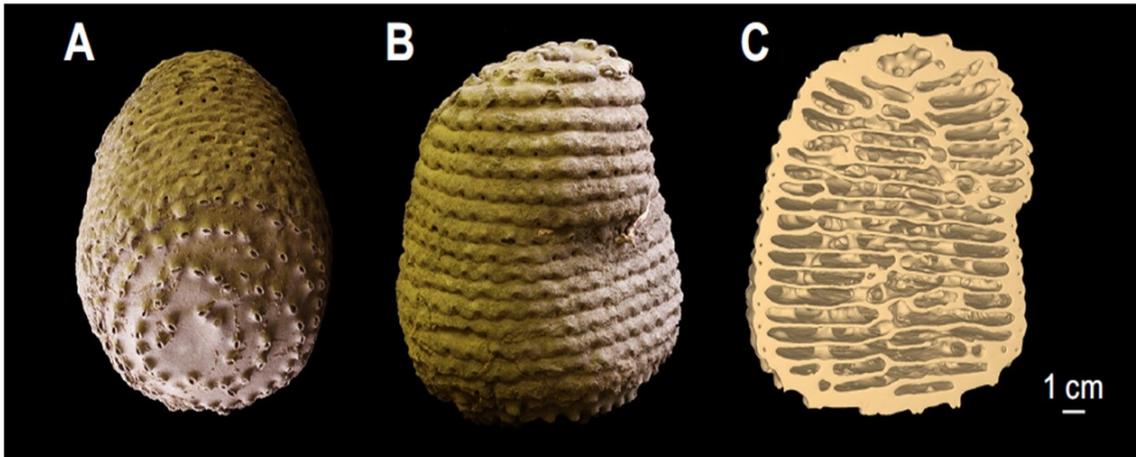
Nos parágrafos anteriores estudamos um pouco sobre a sociedade dos cupins e como ela está estruturada. Focaremos agora nas diferentes geometrias de ninhos de forma a compreender a organização dessas estruturas e os mecanismos que levam à sua formação. As sociedades de insetos, como formigas e cupins, estão entre os organismos vivos que constroem as mais diversas e complexas formas de ninhos. Na figura 5, podem ser vistos ninhos de 5 diferentes espécies de cupins *Odontotermes obesus*, *Cornitermes cumulans*, *Cubitermes funifaber*, *Apicotermes lamani*, *Procornitermes araujo* [3].



**Figura 5:** Diferentes estrutura de ninho. [3]

Esses ninhos desempenham um papel crucial no crescimento e adaptação das colônias: os ninhos garantem proteção contra predação, fornecem um local para armazenar alimentos e permitem uma regulação eficiente das trocas energéticas e gasosas com o ambiente externo. Dentro dos ninhos de cupins, caminhos de comunicação interligados criam redes eficientes e robustas conectando as várias áreas de um ninho. A capacidade mais notável dos insetos sociais é a de remodelar seus ninhos quando o tamanho da colônia está crescendo ou quando as condições ambientais como temperatura, umidade e luz estão mudando [25]. A figura 6 foi retirada do artigo [4] que mostra em A e B, um ninho de cupins do gênero *Apicotermes*. Esses ninhos são construídos em cavidades subterrâneas de 30 a 60 cm de profundidade no solo. Na sua superfície externa apresentam uma série de poros regularmente espaçados que permitem a comunicação entre o exterior do ninho e uma série de corredores circulares que se deslocam no interior da parede externa do ninho. A parte C da figura, mostra a tomografia de raios X do ninho, permitindo a visualização da estrutura interna, que é composta por grandes câmaras espaçadas regularmente, delimitadas por finos pisos de argila. Os diferentes níveis são sustentados por pilares e interligados por rampas.

Dessa forma, a arquitetura de ninhos de cupins tem sido frequentemente citada como



*Figura 6: Estrutura do ninho - diferente vistas. [4]*

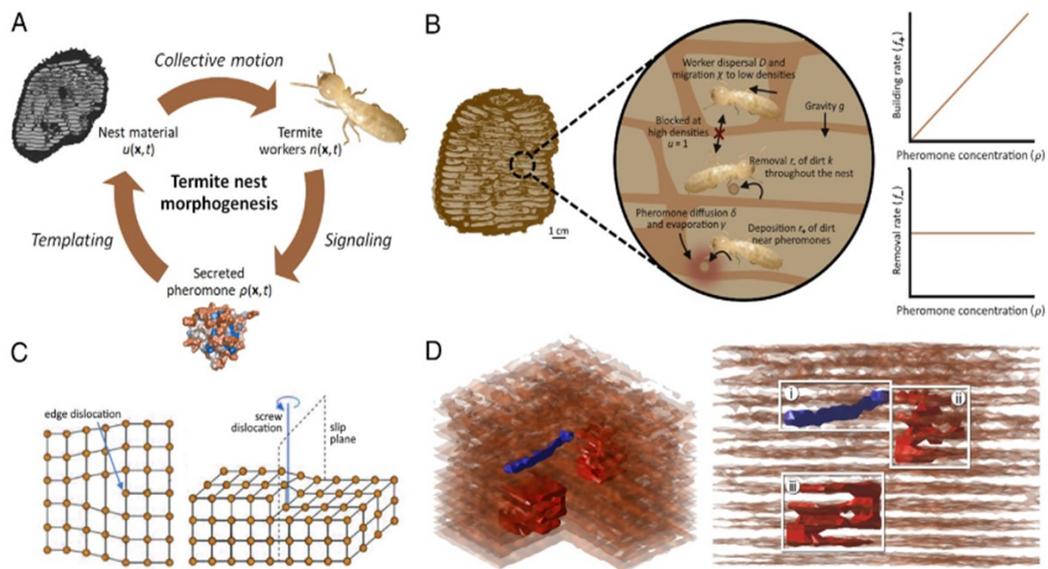
um exemplo impressionante do poder da auto-organização. Os ninhos de insetos sociais não são apenas impressionantes por causa de sua grande complexidade, mas também porque são construídos a partir de indivíduos cujo trabalho não é coordenado centralmente. Uma questão-chave é como grupos de insetos coordenam suas ações de construção. Um ninho de cupins consiste em vários níveis (cada um com cerca de 1 cm de altura). Em uma expansão do ninho, os cupins adicionam um ou mais novos níveis à superfície externa do ninho. O topo em cada nível é sustentado por pilares e paredes construídos a partir de pellets de sujeira mantidos no lugar [26].

Em seu trabalho, Grassé [27] propôs a hipótese de "estigmergia", sua ideia era que os cupins fossem guiados pelo trabalho em andamento e não por um mapa interno, ou seja, propuseram que os cupins operários se comunicavam indiretamente, acoplando suas ações de construção com a deposição de um estímulo local (como um feromônio de construção secretado) no substrato próximo. Até o momento, a stigmergia foi mais explorada através do seu papel nas trilhas de forrageamento de formigas do que na arquitetura de cupins. Um dos mecanismos estigmergícos que atraem cupins é o feromônio que emana de pellets recém colocadas, à medida que o número de depósitos recentes em um local excede um limite, o feromônio atrai cupins para ele. Este mecanismo explica como a atividade de construção é focada naqueles locais que recebem um número limite de pellets recentes. No entanto, existem dois fatos experimentais que requerem um mecanismo adicional para sua explicação. A primeira diz respeito ao crescimento vertical dos cupinzeiro, enquanto a segunda diz respeito ao crescimento lateral.

Os ninhos revelam o comportamento social de uma colônia e, como tal, permitem estudos comparativos. No entanto, por muito tempo, as pesquisas sobre arquitetura de ninhos foram prejudicadas pela falta de ferramentas técnicas que permitissem a visualização de suas complexas estruturas 3D e a quantificação de suas propriedades. Então a visualização das estruturas internas dos ninhos possui dois grandes obstáculos técnicos que dificultam nossa compreensão da organização dessas estruturas e dos mecanismos que levam à sua formação. A primeira é mais prática, e consiste na dificuldade em visualizar de fato as estruturas internas dos ninhos,

metros escondidos no subsolo, ou dentro de grandes montículos. A segunda é mais conceitual; é o problema de encontrar descritores sintéticos e apropriados para as estruturas que observamos. Falando livremente, é o problema de encontrar o desenho 'médio' do ninho entre todos os construídos por uma determinada espécie, apesar de todos os detalhes serem diferentes de um ninho para outro [25].

O modelo biotectônico (modelo computacional 3D) proposto por Heyde et al. [5] representado pela figura a seguir prevê o espaçamento entre pisos e a criação de rampas em ninhos de cupins.



**Figura 7: Modelo biotectônico. [5]**

Na parte (A) observamos o modelo esquemático do ciclo de análise que conduz a construção do ninho, destacando as interações entre o material do ninho  $u$ , os cupins operários  $n$  e o feromônio secretado  $\rho$ . A parte (B) ilustra uma região local do ninho, mostrando os processos no modelo. Os cupins operários migram preferencialmente para regiões de densidade mais baixa e não podem viajar por regiões de densidade muito alta. Os operários removem a sujeira por todo o ninho, mas são mais propensos a depositar sujeira perto dos feromônios que liberam durante a deposição. Os feromônios são assumidos como tendo uma baixa difusividade e, portanto, fornecem um sinal local. Já na parte (C) temos o diagrama de deslocamento de borda e parafuso na padronização de piso. Os deslocamentos de borda que resultam do desalinhamento do piso podem dar origem a rampas lineares, enquanto os deslocamentos em parafuso podem levar a rampas helicoidais que giram em torno de um plano de deslizamento. (D) Reconstrução tridimensional de um ninho simulado de acordo com modelo de construção, mostrado aqui em dois ângulos. Este ninho simulado contém uma rampa linear (i, azul) e duas rampas helicoidais (ii e iii, vermelha).



forrageamento, que é um ramo da ecologia comportamental que estuda as estratégias de busca de alimentos executada por animais em seus ambientes nativos. A figura 8 acima exemplifica o movimento animal e forrageamento considerando a interação entre fenômenos de pequena e grande escala em um ambiente físico. Sendo assim, alguns organismos realizam buscas ao ar livre (parte superior do desenho), enquanto outros realizam buscas em área restrita (parte inferior do desenho). Em grandes escalas, a busca por itens em um ambiente espacialmente claro surge como um componente relevante do forrageamento ótimo. A organização temporal de uma busca em tal espaço fornece padrões estatísticos de exploração que, a longo prazo, podem modificar o sucesso do encontro aleatório [6]. Na figura, o encontro é representado como o colapso do plano espaço-temporal em que os organismos estão se movendo.

A teoria considera o comportamento de busca em relação ao custo-benefício obtido a partir de diferentes opções de procura, presumindo que as opções que maximizam os benefícios (por exemplo, ganho energético decorrente da ingestão de alimento) e minimizam os custos (outro exemplo, desgaste energético devido a caminhada em busca de alimento que implica na redução da reserva de gordura e perda de peso) favorecem o animal e maximizam a função de avaliação ou “fitness” (é uma função de avaliação e o critério utilizado para decidir que espécies prosperam e sobrevivem em um contexto de seleção natural). Existem hoje, muitas versões de forrageamento ótimo relevantes em situações distintas. Algumas são:

- O modelo da dieta ideal, primeiramente testado por John Goss-Custard, que descreve o comportamento de um forrageador que encontra diferentes tipos de presas e deve escolher qual atacar;
- Modelo de seleção de caminhos, descrevendo a dinâmica de um forrageador cujas presas estão concentradas em pequenos aglomerados com distâncias consideráveis entre eles;
- Modelo de ponto central, onde o forrageador precisa retornar a um local particular a fim de consumir sua presa.

O monitoramento de pequenos animais (cupins, formigas, etc) pode ser feito na natureza ou em experimentos planejados e sob condições controladas de laboratório. Um método comum na literatura é manter registros das posições espaciais de cada indivíduo em intervalos regulares ao longo do tempo. Uma vez que os dados são armazenados e processados, as trajetórias são facilmente reconstruídas conectando as coordenadas consecutivas no tempo por meio de uma linha reta. Independente do método utilizado para obter as trajetórias do organismo estudado, uma primeira observação dos dados indica que os animais se movem com certo grau de aleatoriedade. Esta característica tem sido muito útil e tem levado à proposta de modelos de dispersão usando a equação de difusão como uma aproximação e outros modelos de caminhada aleatória igualmente importantes, como voos aleatórios de Lévy e o caminhante aleatório correlacionado [2].

O objetivo fundamental da Física Estatística consiste em deduzir as propriedades macroscópicas dos sistemas a partir das propriedades microscópicas dos seus constituintes. A Física Estatística

ao ligar o mundo microscópico ao mundo macroscópico pode ser entendida como uma justificação da própria Termodinâmica a partir de princípios fundamentais, mesmo conhecendo as leis de interação entre partículas, o número elevado de partículas constituintes de um sistema macroscópico torna impossível tratar as equações de movimento para cada partícula. Necessitando-se de tratamento estatístico, no qual se tomam médias sobre variáveis microscópicas que não são observáveis, de forma a reduzir as equações matemáticas a equações que envolvam só variáveis macroscópicas. Note que no começo do século XX, quando a física estatística estava sendo desenvolvida, a idéia de átomo não era um consenso. Grandes cientistas, Como Mayer, duvidavam da existência de átomos. O sucesso da física estatística foi uma das grandes evidências para a existência dos átomos. Em 1859, Maxwell desenvolve a teoria cinética dos gases, baseado no trabalho de Bernoulli, usando médias sobre um grande número de partículas para conectar a descrição micro com a macro. Em 1864 Boltzmann começa a trabalhar no assunto e em 1872 estabelece a relação entre entropia e número de estados microscópicos, que se torna fundamental. Planck, Clausius e Gibbs também fizeram parte do desenvolvimento do que se torna a física estatística.

O movimento é o principal mecanismo pelo qual os animais interagem com o meio, esses movimentos geram padrões espaços-temporais muito complexos, cujo análises são importantes para uma compreensão adequada dos mecanismos ecológicos fundamentais da dispersão dos indivíduos ou da expansão e crescimento de suas populações. O estudo do movimento dos animais é um problema complexo e uma forma de quantificá-lo é a observação direta. O entendimento quantitativo das consequências do movimento na dinâmica das populações é praticamente impossível sem a ajuda de um modelo matemático. O primeiro passo para gerar um modelo matemático é a coleta de dados experimentais. O monitoramento de animais para obtenção de dados sobre seus movimentos é um trabalho complicado, principalmente devido a restrições tecnológicas para monitorar suas caminhadas [2]. Aqui, estudaremos o forrageamento e sua conexão com a geometria do meio onde o cupim se move.

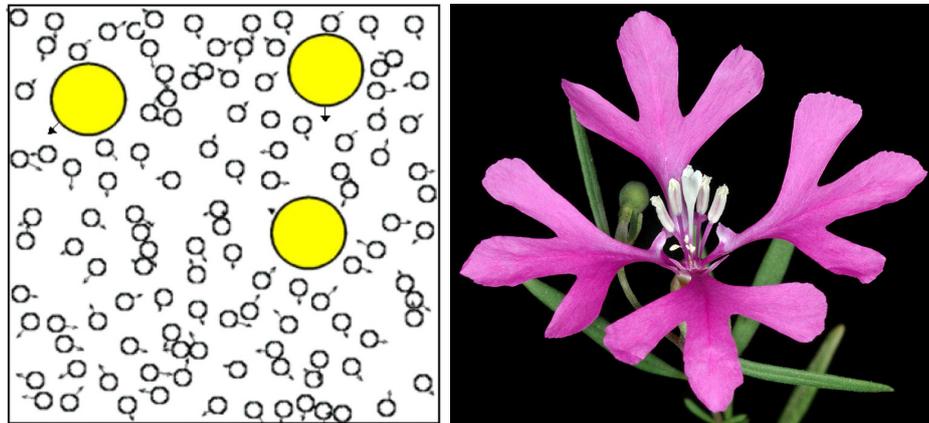
O processo de aprendizagem pode ser definida como a aquisição de experiência, permitindo que um animal mude sua resposta a estímulos ou situações específicas. Considera-se que ela vem evoluindo devido à sua contribuição positiva para a aptidão. As habilidades de aprendizagem na busca por recursos alimentares devem evoluir, especialmente quando os recursos são aglomerados no espaço ou apenas temporariamente disponíveis. As forrageadoras em locais centrais, como formigas e cupins que vivem em ninhos, precisam navegar no espaço não apenas para localizar o alimento, mas também para trazê-lo de volta ao ninho, de forma a minimizar os custos de viagem e tempo. Este requisito selecionou para orientação espacial aprimorada em tais animais [32].

Com o advento das impressoras 3D permitiu que a produção de formas complexas, como labirintos, fosse criada. Labirintos de complexidade matemática conhecida podem ser prontamente usados para testes de hipóteses. Um exemplo de uso labirintos é a investigação da aprendizagem em organismos [33]. A combinação topologia- dinâmica também pode ser aplicada para otimizar certas propriedades temporais de uma rede com a modificação progressiva da estrutura. Além

disso, se a dependência entre este par for previamente conhecida, o sistema pode ser definido para apresentar as propriedades dinâmicas desejáveis. Um processo temporal relativamente simples e flexível muito popular em diversas áreas da ciência que possibilita o estudo topológico de redes através da dinâmica microscópica é o caminhada aleatório (random walk).

### 3.1 CAMINHADA ALEATÓRIA

O modelo que representa vários passos aleatórios dados de forma consecutiva é chamado “Caminhada Aleatória”. Tais passos não podem ser todos iguais e as orientações são determinadas por uma variável aleatória. Caso a variável aleatória dependa do tempo, o processo é denominado de estocástico. A base da teoria da caminhada aleatória pode ser traçada pelo movimento irregular de partículas individuais de pólen, a "dança" aleatória de pequenas partículas em suspensão num líquido estudada pelo botânico Brown (1828), conhecida hoje como movimento browniano.



**Figura 9:** Grãos de pólen (grandes círculos) da planta *Clarkia pulchella*, observados no microscópio flutuando na água em constante movimento (agitação térmica) devido a colisões com moléculas de água (pequenos círculos). [2]

Brown estudou os grãos de pólen da planta *Clarkia pulchella*, que têm aproximadamente 5  $\mu\text{m}$  de comprimento, em suas análises microscópicas notou que os grãos que estavam imersos em água estavam em constante movimento e frequentemente sofriam mudança de forma (contração de um lado e expansão do outro). Por isso, ele achava que o fenômeno não era causado por correntes no fluido nem pela evaporação do líquido, mas que era uma propriedade da própria partícula. Quando ele fez outros experimentos com grãos de pólen menores, ele encontrou um movimento mais expressivo e supôs que estava olhando para o equivalente em plantas de espermatozoides em animais, que nadam no líquido por meio de um flagelo. Ele continuou seus estudos examinando plantas mortas (algumas preservadas em herbários por mais de 20 anos), tecidos animais e vegetais, pequenas partículas de vidro e até poeira de um fragmento de rocha. Em todos os casos, ele encontrou um movimento semelhante. Sua conclusão foi que essas "moléculas ativas" são "facilmente obtidas de todos os corpos" e que, possivelmente, o movimento se deveu à energia da luz incidente nas partículas de pólen ou a vibrações imperceptíveis, ocorridas durante o experimento [2].

Nas décadas seguintes, inúmeras tentativas foram realizadas para desvendar a natureza do movimento browniano. Experimentos de laboratório mostraram que o movimento fica mais intenso quando se reduz a viscosidade do meio ou o tamanho das partículas brownianas, e também quando se eleva a temperatura da solução. Muitas causas possíveis foram aos poucos sendo eliminadas, tais como: atrações ou repulsões entre as partículas suspensas, ações capilares ou higrométricas, bolhas temporárias de ar, correntes de convecção no interior da solução, gradientes de temperatura ou algum tipo de perturbação mecânica, além de outros tipos de instabilidades no fluido [34].

Trabalhos clássicos em probabilidade têm sido estudados por séculos, e até meados do século XX, achava-se que todas as caminhadas aleatórias eram parecidas com o movimento browniano descoberto por Brown e, posteriormente, estudado por Einstein em 1905 [14]. O trabalho dele sobre o movimento browniano abordava a relação entre o coeficiente de difusão e a viscosidade numa dedução probabilística da equação da difusão, obtendo a partir daí, sua conhecida equação para a distância quadrática média percorrida pela partícula no movimento browniano :

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt \quad (3.1)$$

Aqui, o termo  $D$  representa o coeficiente de difusividade e pode ser expresso por:

$$D = \frac{RT}{3\pi N_A a \eta} \quad (3.2)$$

onde  $R$  é a constante universal dos gases,  $T$  é a temperatura,  $N_A$  o número de avogrado,  $a$  é o raio das partículas suspensas e  $\eta$  é a viscosidade do fluido. A equação da difusão, expressa por:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad (3.3)$$

em que  $n = n(x, t)$  é o número de partículas por unidade de volume no instante de tempo  $t$  e posição  $x$ , foi resolvida por Einstein, que obteve como resultado a solução gaussiana:

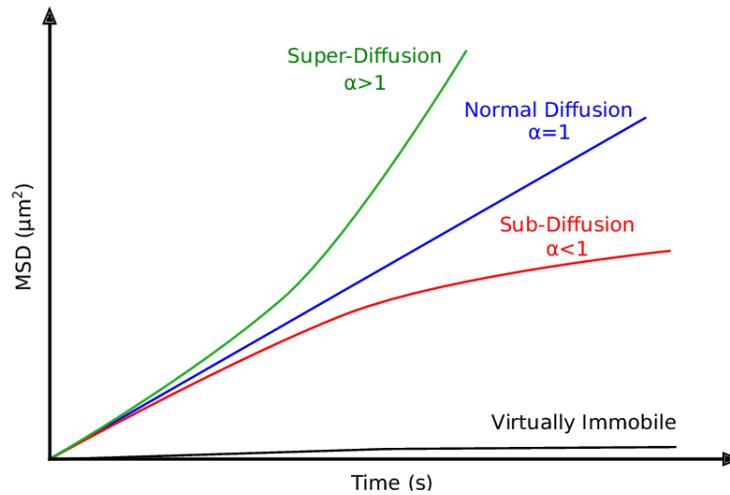
$$\eta(x, t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (3.4)$$

O processo de difusão pode ocorrer de duas formas, difusão normal, governado por uma função densidade de probabilidade gaussiana cuja variância cresce linearmente com o tempo e a difusão anômala, processo de difusão comum a relação não linear ao tempo. A difusão anômala pode ser definida como superdifusiva se  $\alpha > 1$  e denominada subdifusiva se  $\alpha < 1$  e difusão normal se  $\alpha = 1$  O deslocamento quadrático médio MSD pode ser calculado da seguinte maneira:

$$MSD = \langle [x_n(t) - x_n(0)]^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [x_n(t) - x_n(0)]^2 \quad (3.5)$$

onde  $N$  é o número de partículas, sobre o qual a média é tomada,  $x_n(0) = x_0$  é a posição inicial

de cada partícula e  $x_n(t)$  é a posição de cada partícula no tempo  $t$ . A figura abaixo mostra o gráfico para diferentes  $\alpha$ .



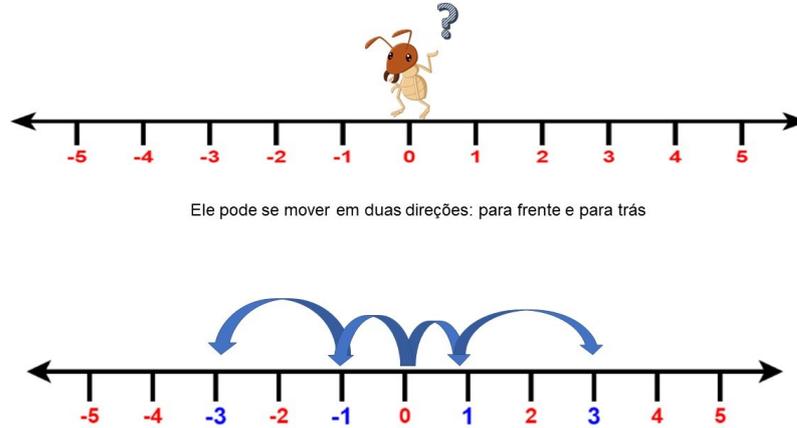
**Figura 10:** MSD e diferentes categorias de difusão. Fonte: [fiscomp.if.ufrgs.br](http://fiscomp.if.ufrgs.br)

Na difusão normal o deslocamento quadrático médio cresce linearmente com o tempo. No entanto, algumas caminhadas aleatórias são superdifusivas, ou seja, o deslocamento quadrático médio não cresce de forma linear com o tempo. No caminhante aleatório unidimensional, quando o número de passos dados pelo caminhante tende a infinito, a distribuição de passos tende a uma função gaussiana, como será discutida em detalhes a seguir.

Os primeiros modelos simples de movimento usando as caminhadas aleatórias, não correlacionadas e imparciais. Neste contexto, não correlacionado significa que a direção do movimento é completamente independente das direções anteriores ao movimento, a localização após cada passo dado aleatoriamente depende apenas do passo anterior, podendo ser considerado um processo markoviano no que diz respeito a localização. Imparcial significa que não há direção preferida: a direção movida em cada passo é completamente aleatória. Supondo que o movimento em qualquer direção é permitido, este processo é essencialmente browniano e tais modelos podem ser mostrados para produzir a equação padrão de difusão (ou calor), mostrada anteriormente. Caminhadas aleatórias podem ser classificadas como Browniana, que tem uma escala característica para o comprimento  $l_j$  dos passos, e caminhada de Lévy, onde o comprimento dos passos não possuem uma escala característica [8]. Com exceção dos humanos, os sinais de forrageamento mais sofisticados de comunicação capazes de indicar a localização e a qualidade da fonte de alimento são exibidos em insetos eusociais.

O modelo de passeio aleatório isotrópico simples (SRW) é a base teórica para a maioria dos processos difusivos. A caminhada é isotrópica, ou imparcial, o que significa que a direção tomada em um determinado momento é independente da direção em momentos anteriores. Usando este modelo podemos deduzir uma equação para o função de densidade de probabilidade (PDF) para a localização de o caminhante em uma dimensão, seja considerando o limite à medida que o número de etapas fica muito grande ou usando uma equação diferencial. O SRW pode ser

estendido para outras dimensões além de 1D. Considere um cupim (caminhante) se movendo em uma rede uniforme unidimensional infinita (ou seja, uma linha dividida em pontos discretos), conforme mostra a figura 10. Suponha que o cupim comece na origem ( $x=0$ ) e então se move uma curta distância  $\delta$  para a esquerda ou para a direita em um curto espaço de tempo  $\tau$  [35].



**Figura 11:** Caminhada Aleatória Unidimensional - O movimento é considerado completamente aleatório. Fonte: desenho criado pela autora.

Suponha agora que o cupim realiza  $n_1$  passos de comprimento fixo  $\delta$  para a direita com probabilidade  $p$  e  $n_2$  passos para a esquerda com probabilidade  $q = 1 - p$ , de modo que  $p + q = 1$ . Faremos o cálculo considerando que os passos são eventos mutuamente independentes, de forma a determinar qual a probabilidade  $P_N(m)$  de encontrar o cupim na posição  $x = m\delta$ , onde  $-N \leq m \leq N$ , depois de ter dado  $N$  passos. Portanto, o número total de passos é

$$N = n_1 + n_2, \quad (3.6)$$

sendo  $m$  a grandeza que parametriza a distância líquida percorrida, isto é,

$$m = n_1 - n_2, \quad (3.7)$$

e como cada passo tem comprimento  $\delta$ , a distância que o cupim percorre a partir da origem é dada por

$$x = (n_1 - n_2)\delta = m\delta. \quad (3.8)$$

Pressupondo que os passos são estatisticamente independentes, de probabilidades  $p$  e  $q$ , a probabilidade de realizar  $n_1$  passos para a direita e  $n_2$  passos para a esquerda é independente da sequência de passos e consegue ser escrita como:

$$p \cdot p \cdot p \cdot \dots \cdot p \cdot q \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q = p^{n_1} q^{n_2} \quad (3.9)$$

Muitas são as formas de arranjar os  $N$  passos de forma que  $n_1$  seja o número de passos para a direita e  $n_2$  seja o número de passos para a esquerda. Na verdade, encontrar o número de

maneiras de arranjar os  $n_1$  e  $n_2$  passos, é encontrar de quantas maneiras distintas podem ser arrançados  $n_1 + n_2$  objetos, sendo que a permutação de qualquer um dos objetos ( $n_1 + n_2$ ) é irrelevante. Tal fato significa que o número de possibilidades distintas é exatamente

$$\frac{N!}{n_1!n_2!} \quad (3.10)$$

e que a probabilidade total,  $P_N(n_1)$ , de realizar  $n_1$  passos para a direita e  $n_2$  para a esquerda num total de  $N$  passos, em qualquer ordem, é dada pelo produto

$$P_N(n_1) = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1}, \quad (3.11)$$

uma vez que, todas as sequências são independentes. Como vemos, o valor de  $P_N(n_1)$  é uma distribuição binomial. Note que a expansão binomial de  $(p+q)^N$ , onde  $p$  e  $q$  são dois números quaisquer, é dada por:

$$(p+q)^N = \sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1} \quad (3.12)$$

Acontece que a distribuição  $P_N(n_1)$  é normalizada, ou seja,

$$\sum_{n_1=0}^N P_N(n_1) = \sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1} = (p+q)^N = 1 \quad (3.13)$$

Esta é uma forma da distribuição binomial. Para  $N$  grande, isso converge para uma distribuição normal (ou gaussiana), então após um período de tempo suficientemente grande  $t = N\tau$ , a localização de  $x = m\delta$  do caminhante tem distribuição normal com média 0 e variância  $\delta^2 t / \tau$ . Tomando o limite  $\delta, \tau \rightarrow 0$  tal que  $\delta^2 / \tau = 2D$ , onde  $D$  é uma constante conhecida como coeficiente de difusão, fornece o PDF para a localização do caminhante após o tempo  $t$ . Observe que esta é a solução fundamental da equação de difusão [35] [34].

$$p(x,t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (3.14)$$

A distribuição gaussiana é utilizada para o estudo de uma vasta quantidade de fenômenos naturais, em particular aos relacionados à difusão normal. Ela surge naturalmente como uma distribuição limite para processos aleatórios, como consequência. O Teorema do Limite Central (TLC), que é utilizado em problemas que envolvem análise estatística. Este teorema mostra que a distribuição da soma de  $N$  variáveis torna-se gaussiana para  $N \rightarrow \infty$  mesmo que as distribuições individuais das variáveis  $x_i$  não sejam em geral gaussianas. Desta maneira, pode-se ter uma variável que inicialmente possui uma distribuição muito diferente da distribuição normal e que ao tomar várias amostras grandes desta distribuição, a forma dos histogramas das médias amostrais tenderá a uma curva gaussiana. Do TLC, é possível verificar que quando não há o domínio da variância de uma distribuição em relação a outra, e as variáveis são fracamente interdependentes

há uma estabilidade na distribuição gaussiana . O TLC mostra que distribuições com segundo momento finito convergem gradualmente para distribuição estável gaussiana [35]. A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com distribuição normal é dada por:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.15)$$

onde  $\mu$  é a média e  $\sigma^2$  é a variância. A equação acima é denominada distribuição Gaussiana padrão.

Estatísticas úteis dependentes do tempo para entender os processo de caminhada, são a localização média  $E(X_t)$  e o deslocamento quadrático médio (MSD)  $E(X_t^2)$ , definido como:

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x,t) dx \\ E(X_t^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x,t) dx \end{aligned} \quad (3.16)$$

O primeiro resultado ilustra a ausência de uma direção ou viés preferencial (em média não há movimento geral em nenhuma direção), enquanto o segundo resultado ilustra a propriedade padrão de um processo difusivo (eq. 1) no qual o MSD aumenta linearmente com o tempo. Essa relação entre MSD e D (coeficiente de difusão), e sua equivalência em dimensões superiores, é extremamente importante pois fornece um meio de estimar a partir de dados empíricos o coeficiente de difusão D que é usado em muitos modelos matemáticos de processos difusivos [22].

Existem três formalismos matemáticos para tratar uma difusão normal, são eles: as equações de Langevin, Fokker Planck e Mestra. De uma forma sucinta, os 3 formalismos serão abordados a seguir. Um maior detalhamento matemático pode ser lido no livro de referência [8], do qual foram retiradas essas equações para os formalismos. A equação de Langevin é uma equação diferencial estocástica de velocidade em termos de ruído: tipicamente é um processo de Winer ( processo estocástico de tempo contínuo frequentemente chamado de movimento browniano) .

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = F\beta\vec{v} + \vec{\eta}(t) \quad (3.17)$$

A equação de Fokker-Planck (FP) (ou equação direta de Kolmogorov) é uma equação de difusão geral e uma das mais simples. A equação de Fokker-Plack mais conhecida corresponde a caminhantes aleatórios livres.

$$\frac{\partial}{\partial t} P = D \frac{\partial^2}{\partial t^2} P \quad (3.18)$$

onde  $D$  é a constante de difusão. Se os caminhantes partem da origem retornamos a equação 3.7.

A equação mestra governa os processos estocásticos markovianos <sup>1</sup>. A equação mestra descrevendo um caminhante aleatório saltando entre sítios é dada por:

---

<sup>1</sup>O estado seguinte do sistema depende apenas do estado atual e não dos estados anteriores, em outras palavras, o resultado de um experimento depende apenas do resultado do experimento anterior

$$\frac{d}{dt}P_k = \sum_l [W_{k,l}P_l - W_{l,k}P_k] \quad (3.19)$$

onde  $P_k(t)$  representa a probabilidade de estar no estado  $P_k(t)$  no tempo  $t$  e  $W_{k,l}$  são as taxas de transição do sítio  $l$  para o sítio  $k$ . E todas as três abordagens são formalmente equivalentes. Da mesma forma temos os formalismos matemáticos para a difusão anômala. Sendo essas equações de forma análoga retirada do livro de referência [8]. A abordagem mais conhecida é o formalismo de caminhada aleatória de tempo contínuo (CTRW). As CTRWs foram propostas por Montroll e Weissem 1965, permitem uma generalização dos processos Wiener subjacentes à equação de Langevin. O principal ponto dessa generalização envolve permitir distribuições mais gerais de tamanhos de passos e de tempo de espera dos caminhantes.

$$P(k, s) = \sum_{N=0}^{\infty} \left[ \hat{\lambda}^N(k) \tilde{w}^N(s) \left( \frac{1 - \tilde{w}(s)}{s} \right) \right] = \left( \frac{1 - \tilde{w}(s)}{s} \right) \left( \frac{1}{1 - \tilde{w}(s) \hat{\lambda}(k)} \right) \quad (3.20)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de um salto e  $w$  é o tempo de pausa. Uma solução analítica pode ser obtida pela transformada de Fourier-Laplace.

O segundo formalismo é a generalização das equações de Fokker-Planck como derivadas temporais ou espaciais fracionárias. A subdifusão em um campo de força externo foi recentemente formulada em termos de uma equação fracionária de Fokker-Planck (FFPE) a qual foi derivada do princípios de passeio aleatório e de uma abordagem dinâmica baseada em uma equação de Langevin. A FFPE para subdifusão no campo de força externo  $F(x) = \Phi'(x)$  [7].

$$\frac{\partial W}{\partial t} = {}_0 D_t^{1-\alpha} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} + K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] W_{(x,t)} \quad (3.21)$$

### 3.2 CAMINHADA DE LEVY

A história da caminhada de Lévy indica uma junção de biologia, matemática e física. Paul Lévy (1886-1971) foi um matemático francês que estava interessado em estudar distribuições de probabilidade com certas propriedades, particularmente que a distribuição de probabilidade para uma soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tomado a mesma forma que a distribuição de probabilidade para cada componente da variável. A hipótese de Lévy surgiu da junção entre o modelo de caminhada de Lévy de movimentos e a abordagem de forrageamento ótimo. Foi demonstrado que, sub certas circunstâncias, uma estratégia de caminhada de Lévy poderia ser mais eficaz na localização de alvos distribuídos aleatoriamente do que o movimento browniano [36].

Como vimos anteriormente, a posição de um caminhante aleatório é frequentemente definida como uma soma de  $N$  deslocamentos distribuídos  $\Delta X_N$ :

$$X_N = \sum_{n=1}^N \Delta X_N \quad (3.22)$$

Cada deslocamento é extraído da mesma função de densidade de probabilidade (pdf)  $p(\Delta x)$ . Aqui é suficiente discutir pdfs de passos simétricos em uma dimensão. De acordo com o teorema do limite central a pdf  $W_Y(y, N)$  para a posição escalada

$$X_N = \frac{X_N}{\sqrt{N}} \quad (3.23)$$

é independente de  $N$  no limite  $N \rightarrow \infty$  e Gaussiana, ou seja

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W_Y(y, N) = W_Y(y) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \quad (3.24)$$

onde  $\sigma^2$  é a variância dos passos  $\Delta X_n$ . Da equação (3.21) pode-se ler a relação de escala universal

$$X_n \sim \sqrt{N} \quad (3.25)$$

para passeios aleatórios comuns e pode-se obter a variância de  $X_N$  em função do número do passo  $N$ ,

$$\langle X_n^2 \rangle = \sigma^2 N \quad (3.26)$$

A Equação 3.21 combinada com a equação 3.22 implica que para  $N$  grande a pdf  $W_X(x, N)$  para a posição  $X_N$  é assintoticamente uma gaussiana de espalhamento:

$$W_X(x, N) \sim \frac{1}{\sqrt{N}} W_Y(x/\sqrt{N}) \quad (3.27)$$

O fato de  $W_X(x, N)$  depender da razão  $x\sqrt{N}$  apenas é outra maneira de enunciar a relação de escala (eq. 3.23). Observe, no entanto, que para a relação (eq. 3.26) a existência da variância dos

passos simples não é um requisito ao, contrário da (eq. 3.25). Em grandes escalas, trajetórias de caminhadas aleatórias comuns se assemelham ao movimento browniano comum. A caminhada de Lévy pertence a uma classe de passeios aleatórios para os quais o teorema do limite central não se aplica. Eles podem ser definidos de maneira semelhante aos passeios aleatórios comuns, ou seja, por uma soma de incrementos aleatórios independentes identicamente distribuídos (Eq. 3.20). No entanto, se as pdfs de passo único possuem caudas algébricas, de modo que o segundo momento de passo único é divergente, ou seja [7],

$$p(\Delta x) \sim \frac{1}{\Delta x^{1+\alpha}} \quad 0 < \alpha < 2, \quad (3.28)$$

Afirma que se a posição de um voo de Lévy for escalonada de acordo com

$$Y_N = \frac{X_N}{N^{1/\alpha}} \quad (3.29)$$

A variável de escala possui uma pdf independente de  $N$  no limite  $N \rightarrow \infty$ , ou seja.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W_{Y,\alpha}(y, N) = W_{Y,\alpha}(y) \quad (3.30)$$

A densidade limite  $W_{Y,\alpha}(y)$  é referida como uma lei estável de Lévy de índice  $\alpha$  e não é mais gaussiana. Pode ser expressa mais facilmente no espaço de Fourier:

$$W_{Y,\alpha}(y) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-iky - D|k|^\alpha} dk \quad (3.31)$$

onde  $D$  é alguma constante. Assintoticamente, a densidade limite tem o mesmo comportamento da lei de potência que o distribuição de passo único,

$$W_{Y,\alpha}(y) \sim \frac{1}{|y|^{1+\alpha}} \quad (3.32)$$

Combinando as equações 3.27 e 3.29 pode-se obter uma expressão explícita para a pdf em  $X_N$  no limite do grande número de passos,

$$W_{X,\alpha}(x, N) \sim \frac{1}{N^{1/\alpha}} W_{Y,\alpha}\left(\frac{x}{N^{1/\alpha}}\right) \quad (3.33)$$

Quando os deslocamentos espaciais são extraídos de uma PDF de lei de potência como a equação 3.26, a transformada de Fourier para pequenos argumentos é dada por:

$$f(k) = 1 - D_\alpha |k|^\alpha + \vartheta(k^2) \quad (3.34)$$

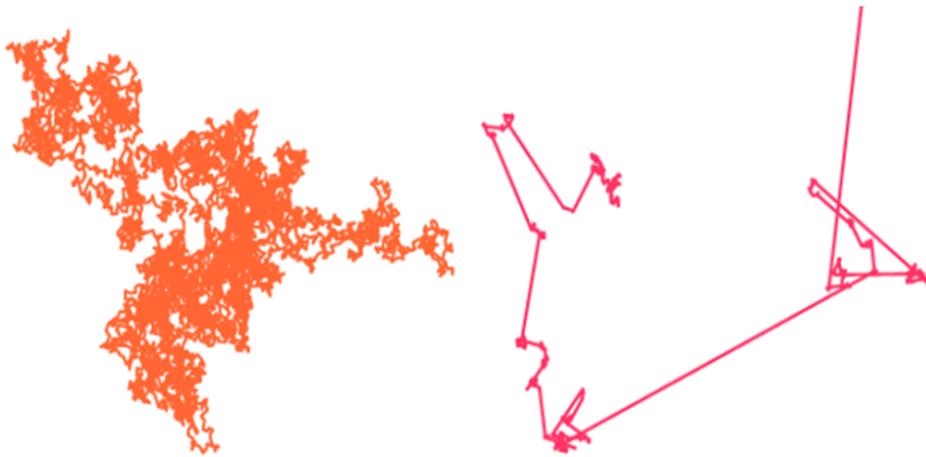
Quando combinado com incrementos temporais com valor esperado finito, o mesmo procedimento descrito acima produz:

$$W(x, t) \sim \frac{1}{t^{1/\alpha}} L_\alpha\left(\frac{x}{t^{1/\alpha}}\right) \quad (3.35)$$

onde  $L_\alpha$  é uma lei estável de Lévy de índice  $\alpha$ . Consequentemente, um CTRW com passos espaciais distribuídos algebricamente de variância infinita é equivalente a voos normais de Lévy com uma escala superdifusiva com o tempo.

$$X(t) \sim t^{1/\alpha} \quad (3.36)$$

Geometricamente, as trajetórias dos vãos de Lévy são facilmente distinguidas daquelas do movimento browniano comum. Na figura 12 uma trajetória bidimensional de um vão de Lévy é comparada com uma trajetória de movimento browniano comum.



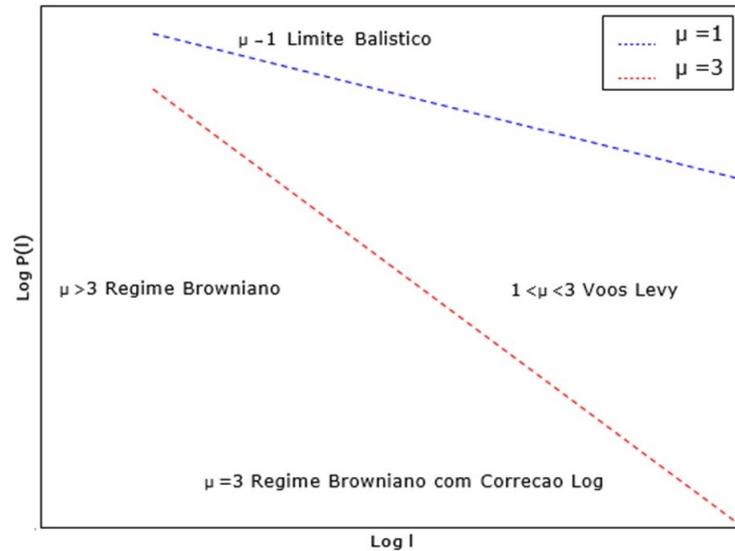
**Figura 12:** Trajetórias bidimensionais de passeios aleatórios em grandes escalas. Esquerda: Passeio aleatório comum com variância finita e bem definida de passos simples. Direita: A trajetória de voo de Lévy de índice  $\alpha = 1$ . [7]

Vãos e caminhadas de Lévy, tipos particulares de caminhadas aleatórias, têm sido aplicadas para modelar a difusão anômala. Este tipo de processo está presente em uma série de fenômenos, dentre elas movimentação de animais na qual focaremos. Estes modelos de caminhadas aleatórias são caracterizados pela presença de uma distribuição de "cauda" longa que permite a alternância entre alguns raros saltos muito longos e um grande número de saltos curtos [37].

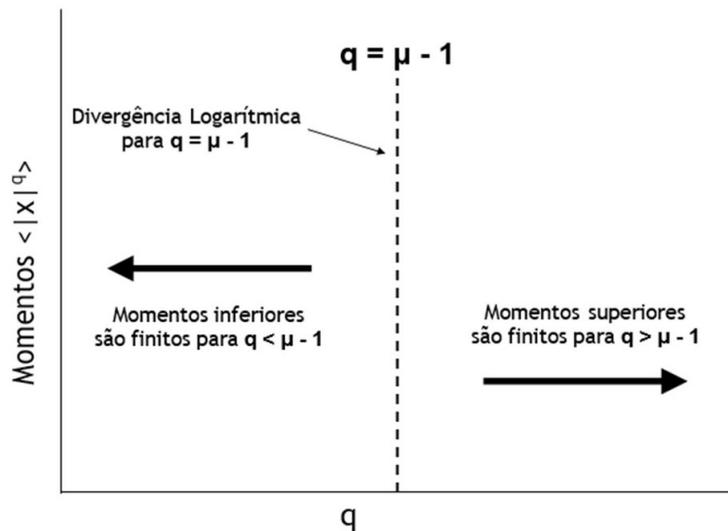
Processos de Lévy aparecem quando a distribuição do tamanho dos saltos tem uma cauda em lei de potência,

$$\lambda(l) \sim l^\mu, \quad (3.37)$$

que leva a uma variância divergente para  $\mu < 3$ . As condições suficientes e necessárias do TLC não se sustentam nesse caso. Em vez disso, verifica-se que a função densidade de probabilidade do caminhante converge para uma distribuição de Lévy estável com índice de Lévy  $\alpha = \mu - 1$ , com  $0 < \alpha < 2$ . Quando  $\alpha = 1$  há difusão normal (figura 13). Quando  $\alpha \leq 2$ , o comportamento é superdifusivo, com o limite  $\alpha \rightarrow 0$ , ou seja,  $\mu \rightarrow 1$  levando ao movimento balístico. Para  $\alpha < 2$ , não é possível definir o deslocamento médio quadrático porque ele diverge. Em vez disso, pode-se estudar momentos de ordem inferior a  $\alpha$  porque eles não divergem figura 13 [8].



**Figura 13:** Para um caminhante aleatório que dá passos de tamanho  $l$  de acordo com a função densidade de probabilidade  $P(l) \sim l^{-\mu}$ , o tipo de difusão depende do valor de  $\mu$ . Para  $\mu > 3$ , o TCL garante a convergência para a difusão normal. O limite balístico corresponde à  $\mu \rightarrow 0$ . Para  $\mu \leq 1$ ,  $P(l)$  não é normalizável. Valores intermediários, isto é,  $1 < \mu < 3$  resultam em voos de Lévy superdifusivos. [8]



**Figura 14:** Para uma distribuição lei de potência  $P(l) \sim l^{-\mu}$  de passos ou tamanho de passos  $l$  momentos superiores não existem. Especificamente, o momento de ordem  $\mu - 1$  diverge logaritmicamente com limite superior, e todos momentos superiores divergem como alguma potência de limite superior. Momentos inferiores permanecem finitos. Momentos divergentes são uma consequência das propriedades de invariância de escala: sistemas livre de escala não tem características de escalas bem definidos. [8]

Por isso precisamos saber um fator de relevância para o estudo de caminhadas aleatórias é o comportamento temporal do TLC. E um parâmetro utilizado para estudar o tipo de difusão gerada pela dinâmica da caminhada é o expoente de Hurst,  $H$ :

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{l}_i \quad (3.38)$$

definido como a somatório de todos os passos da caminhada, a raiz quadrada da distância média quadrática do caminhante,  $\langle (\Delta L)^2 \rangle^{1/2}$ , é proporcional a  $t^H$ , para  $t$  suficientemente grande. O expoente  $H$  traz informações sobre a geometria do perfil analisado, e também sobre a persistência ou não do processo. O expoente de Hurst ( $H$ ) é limitado para o intervalo  $0 \leq H < 1$ , e está intimamente relacionado com as características geométricas do perfil, sintetizando toda a informação relacionada ao seu reescalonamento [38]. O movimento browniano que possui passos com variância finita e sem correlação, tem  $H = 1/2$ , implicando na difusão normal. Para valores de  $H \neq 1/2$  tem-se difusão anômala, com  $H > 1/2$  implicando em superdifusão e  $H < 1/2$  em subdifusão. Quando  $H = 1$  o comportamento é denominado balístico [8].

Dessa maneira, pode-se definir largura, como uma meia largura a meia altura, e mostrar que um pseudo deslocamento quadrático médio cresce como  $\sim t_1/\alpha$  para voos de Lévy. Assim, um único expoente de Hurst,

$$H = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\mu - 1} \quad (3.39)$$

caracteriza o comportamento de voo de Lévy. A relação de escala segue da forma do propagador, que é uma distribuição estável de Lévy. Para o caso de um voo de Lévy com velocidade de arrasto zero e ruído simétrico, o propagador tem forma geral.

$$P(x, t) = \mathfrak{N}(t) F \left( -\frac{|x|}{t^{1/\alpha}} \right) \quad (3.40)$$

onde  $\mathfrak{N}$  é a normalização. Assim os momentos satisfazem

$$\langle |x|^q \rangle^{1/q} \sim t^{1/\alpha}, \quad q < \alpha \quad (3.41)$$

A diferença entre caminhada e voo de Lévy diz respeito à velocidade. Especificamente, um voo de Lévy pode ser descrito por uma equação mestra com taxas de transição de longo alcance no espaço, uma vez que é um processo Markoviano. Por outro lado, um caminhante de Lévy, leva  $v l_j$  unidades de tempo para se deslocar uma distância  $l_j$  devido sua velocidade finita  $v$ . Caminhadas de Lévy podem ser descritas em termos de uma função  $\delta$  de Dirac espaço-tempo. Se o interesse do estudo está em uma função do tempo real  $t$ , deve-se utilizar a expressão caminhada de Lévy. Entretanto, se o foco do estudo é expressar a escala em termos do número de passos  $j$  da caminhada aleatória, é apropriado utilizar o termo voo de Lévy porque  $j$  é proporcional ao tempo de ação para um voo de Lévy [37].

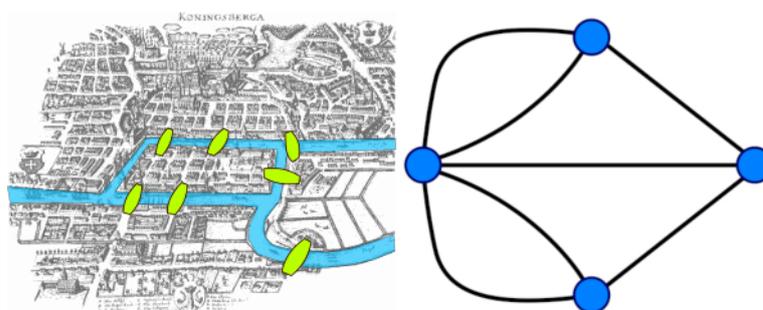
Caminhadas de Lévy tornam-se semelhantes a vôos de Lévy apenas para um período de tempo grande. Embora caminhadas e voos de Lévy tenham muitas características em comum, algumas diferenças singulares não devem ser negligenciadas. Uma característica dos voos de

Lévy é possuir velocidades infinitas, o que é fisicamente impossível, assim não se pode descrever voos de Lévy num espaço físico geométrico. [8].

Por outro lado, caminhadas de Lévy não violam as leis físicas. Precisamente, nenhuma quantidade física mensurável diverge no tempo para uma caminhada de Lévy. A variância infinita do processo de Lévy torna-se uma questão de tempo infinito apenas porque um caminhante de Lévy pode percorrer uma distância máxima de  $vt$  em um tempo  $t$ . Logo, todos os momentos do propagador permanecem finitos em todo tempo, diferente dos voos de Lévy, que possuem momentos divergentes. Em forrageamento e movimento animal, caminhadas de Lévy são mais plausíveis [37].

#### 4 REDES COMPLEXAS

O estudo de redes complexas origina-se em uma das grandes áreas da matemática discreta conhecida como teoria dos grafos, que se iniciou em 1736 quando Leonhard Euler publicou a solução do problema das pontes de Königsberg (figura 15) no século 13, um enigma mobilizou uma pequena cidade localizada ao norte da Europa. Foi o desafio das sete pontes de Königsberg, na qual seis delas conectavam duas ilhas às margens do Rio Pregel e uma que fazia a ligação entre as duas ilhas. O problema consistia na seguinte questão: como seria possível fazer um passeio a pé pela cidade de forma a se passar uma única vez por cada uma das sete pontes e retornar ao ponto de partida? Da resposta ao enigma surgiu a Teoria dos Grafos [39].

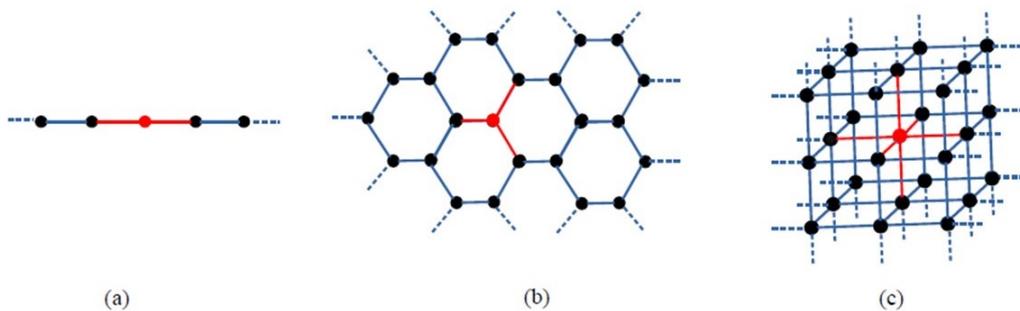


**Figura 15:** Ponte de Königsberg. Fonte: Adaptado de wikipedia.org

Os maiores avanços da teoria dos grafos ocorreram apenas no século XX quando matemáticos passaram a estudar topologias mais complexas através de métodos estatísticos para determinar características estruturais de grande escala. Entretanto, com o avanço da tecnologia de informação e o grande aumento do poder computacional, o interesse no estudo de grafos cresceu e originou um novo movimento de pesquisa, conhecido como redes complexas. Um dos aspectos que desperta interesse, devido à importância em sistemas reais é, a relação entre topologia e processos dinâmicos. O estudo deste relacionamento pode ser usado para verificar propriedades estruturais que influenciam comportamentos dinâmicos, permitindo antecipar e, conseqüentemente, prevenir efeitos indesejados no sistema [40].

Existe uma discussão sobre a definição de uma rede complexa. Alguns autores preferem

usar critérios baseados em propriedades estruturais e outros preferem utilizar o tamanho da rede segundo o número de vértices. De forma a facilitar o entendimento a seguinte definição será usada, rede complexa é um conjunto de objetos matemáticos desenvolvidos na teoria dos grafos que consegue abstrair as propriedades estruturais que apresenta um sistema real ou sintético. Um aspecto central no estudo de redes complexas é modelar e caracterizar as informações obtidas de uma rede. Portanto, um grafo pode ser definido matematicamente mediante a composição de dois conjuntos,  $G(v; \varepsilon)$  onde  $\varepsilon$  e  $v$  são, respectivamente, o conjunto de vértices (nós) e arestas(conexões), ou seja,  $v$  é um conjunto não ordenado de pares de vértices  $(i; j)$  que pertencem a  $\varepsilon$ . Devido a sua aparente simplicidade estrutural, um dos primeiros modelos, usados foram os grafos regulares, ou seja, figuras geométricas regulares dentro de um espaço euclidiano. As redes regulares classificam-se em função de sua dimensão euclidiana  $n$ . Como resultado, o número de vértices  $x$ , dentro de uma distância  $r$  cuja origem está localizada em um vértice  $i$ , aumentará com  $x(r) \sim r^n$ . Na Figura 16 apresentam-se três tipos de redes regulares com dimensionalidades diferentes e diversas formas topológicas. Toda rede regular será conexa pois o grau <sup>2</sup> de todos os vértices permanece constante [9].



**Figura 16:** Redes regulares de diferentes dimensionalidades. (a) Rede de cadeia linear infinita em uma dimensão de grau  $k = 2$ , (b) rede hexagonal infinita em duas dimensões de grau  $k = 3$ , (c) rede cubica em três dimensões com grau  $k = 6$ . As arestas vermelhas ressaltam o grau característico da rede regular. [9]

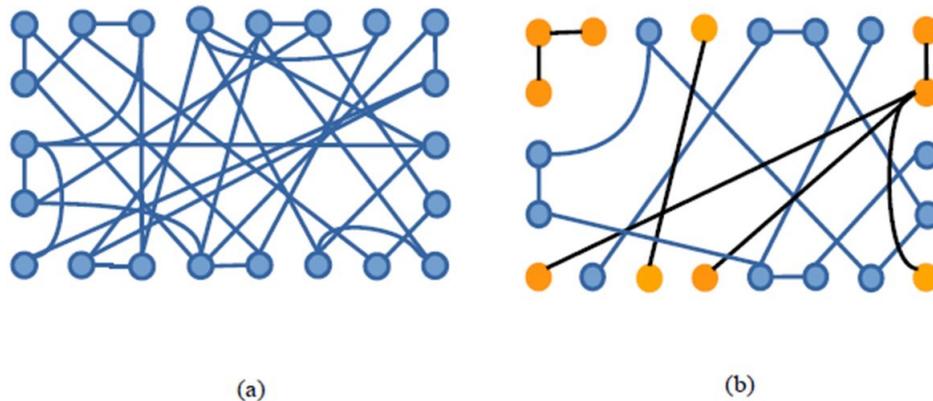
Sistemas que apresentam processos dinâmicos onde há diversas interações entre seus elementos, como o movimento Browniano, são descritos por meio de algoritmos baseados em métodos estocásticos e simulações que consideram a propriedade de Markov, sendo assim, o fenômeno da difusão pode ser caracterizado através de diversos métodos matemáticos ou simulações de caminhantes aleatórios sobre uma rede. No contexto de redes complexas, o passeio aleatório consiste em um caminhante visitando vértices consecutivos escolhidos aleatoriamente entre todos os vizinhos do vértice atual. Apesar de simples, a vantagem dele utilizar apenas informações locais da rede o torna adequado quando conhecemos poucas propriedades do sistema como um todo. Um novo formalismo no espaço discreto é considerado um processo de difusão em que um caminhante pode saltar, desde sua posição atual com uma probabilidade diferente

<sup>2</sup>O grau de um vértice  $k_i$  é uma propriedade local que determina a conectividade, ou o grau de interação, de um vértice  $i$  com seus vizinhos mais próximos.

de zero, a um vértice que está a uma certa distância. Este método será uma generalização do método clássico dos caminhantes aleatórios e se conhece como o método de Lévy Random Walks (LRW) [14].

A construção de uma rede aleatória inicia-se com um conjunto definido de  $N$  vértices, e posteriormente são agregadas arestas que conectam pares de vértices. A introdução de cada aresta depende de um parâmetro de probabilidade  $r$ , sendo independente da existência de outras arestas. Usando a teoria de redes aleatórias, se iniciou diversos estudos que descrevem propriedades estatísticas das redes [41].

Os matemáticos Paul Erdős e Alfréd Rényi [42] introduziram o modelo de rede aleatória, um dos resultados encontrados, refere-se ao parâmetro de probabilidade  $\rho$ , se este é maior que um valor crítico  $\rho_c \simeq \ln N/N$ , a rede aleatória será uma rede uma conexa, caso contrário, a rede será uma rede desconexa. Na Figura 3.8, temos dois exemplos, mostrando uma rede aleatória conexa  $\rho > \rho_c$  e uma rede aleatória não conexa  $\rho < \rho_c$ . A rede aleatória conexa possui a chamada propriedade de pequeno mundo, ou seja, observa-se que sua distância média entre os vértices escala com o logaritmo do tamanho da rede  $\langle L \rangle$  [43].



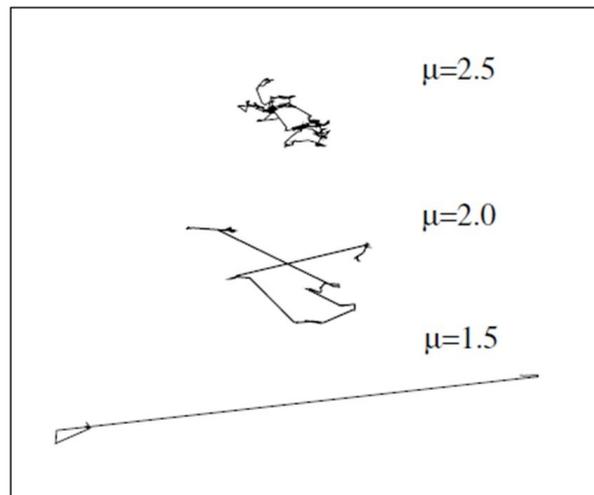
**Figura 17:** Exemplo de duas redes aleatórias formadas com valores de probabilidade diferentes e  $N = 27$ . (a) Rede aleatória conexa gerada com  $\rho > \ln N = N$  (b) Rede aleatória desconexa gerada com  $\rho < \ln N = N$ , as arestas em cor preta ressaltam as partes onde a rede aleatória é desconexa. [9]

Uma série de estudos confirmou a hipótese generalizada de que as características de uma busca aleatória de rede estão relacionadas às características topológicas da rede, particularmente a conectividade do site. A este respeito, pode-se ter as redes reticuladas em duas classes: (i) redes de pequeno mundo e (ii) redes de grande mundo. As redes de mundos pequenos são conectadas globalmente e possuem distribuições de ligação de lei de potência. O diâmetro da rede cresce sublinearmente (logaritmicamente) com o número de nós devido à existência de ligações raras de longo alcance – essas ligações ultralongas atuam como atalhos que reduzem o número de ligações necessárias através dos quais a informação deve se propagar (um exemplo é a World Wide Web). Em oposição, redes de grande mundo são conectadas localmente e ricas em clusters, com apenas ligações de curta distância, geralmente entre os primeiros nós vizinhos.

Nesses casos, a distribuição de tamanhos de enlaces <sup>3</sup> é uma distribuição gaussiana estreita, truncada perto da origem, fazendo com que a distância média (diâmetro da rede) entre dois sites arbitrários aumente linearmente com o número total de sites [44]

A seguir será discutido de forma sucinta o problema de buscas aleatórias em redes regulares e defeituosas, com apenas conexões locais entre nós. Como fatores relevantes que determinam os resultados finais de uma busca aleatória em tais ambientes, analisamos o papel da conectividade, condições de contorno, densidade de alvos e densidade de defeitos. Considerando também o famoso problema de encontrar o caminho mais curto entre o remetente e o destinatário de uma mensagem, dado apenas informações locais. Em uma rede, definimos um local como receptor e outro como emissor da mensagem, o objetivo é determinar o tempo de entrega esperado, ou seja, o número médio de passos necessários para que a informação viaje do remetente ao destinatário. Em redes de mundo pequeno, diferentemente das redes regulares, sempre há uma trajetória curta ligando dois pontos [44].

As treliças regulares têm uma métrica semelhante à dos espaços contínuos: quanto mais distante um local de destino, maior é a distância percorrida para alcançá-lo. Isso não é verdade, por exemplo, para redes de mundo pequeno não escalonadas, nas quais uma única ligação pode conectar dois nós extremamente distantes. Descobertas recentes para buscas contínuas mostram em diferentes situações que buscas aleatórias são mais eficientes se assumirmos caudas de lei de potência para os comprimentos de voo ver figura 18 [45].



**Figura 18:** Ilustração da caminhada de Lévy governada pela distribuição de passos definida na equação (3.37). Os três exemplos mostram caminhadas percorrendo a distância total de 1000 unidades, note como  $\mu$ , o expoente da lei de potência afeta a frequência dos deslocamentos com tamanho muito superior à média. No limite  $\mu \rightarrow 1$ , observa-se superdifusão enquanto  $\mu \rightarrow 3$ , recupera o comportamento Browniano. [8]

O ambiente de busca pode ser definido como um espaço cartesiano d-dimensional contendo uma distribuição homogênea de objetos distribuídos aleatoriamente. Os alvos são caracterizados

<sup>3</sup>Enlace ou link de comunicação é o estabelecimento de comunicação entre pelo menos dois pontos

por suas propriedades regenerativas sintetizadas no parâmetro  $\Gamma$ , portanto com  $\Gamma = 1$  os alvos são voláteis (destrutivos), sinalizando que cada alvo só pode ser visitado (encontrado ou consumido) uma vez, portanto, ao detectar o alvo ele será completamente destruído. não está disponível para visitas futuras. Para  $\Gamma = 2$ , o ambiente corresponde ao caso não-destrutivo onde os alvos, podem ser visitado várias vezes continuando acessíveis a visitas futuras. Nos casos intermediários ( $1 < \Gamma < 2$ ), obtemos o ambiente regenerativo, e neste caso supondo que todos os alvos encontrados são destruídos, inacessíveis por um certo tempo  $t$ , até que ocorra sua regeneração. Após um período de regeneração o alvo estará novamente disponível e voltará a ser detectável exatamente na mesma posição onde foi detectado e destruído anteriormente pelo forrageador. O parâmetro  $\Gamma = 1$ , corresponde ao limite  $\tau \rightarrow \infty$ , enquanto  $\Gamma = 2$ , corresponde a  $\tau \rightarrow 0$ . Não importando qual seja o ambiente de busca, ele sempre encerra uma densidade de alvos:

$$\rho = \frac{n}{V_d} \quad (4.1)$$

A densidade de alvos é definida como  $n$ , a quantidade de alvos, por unidade de hiper-volume  $V_d$ , onde o índice  $d$ , é a dimensão espacial. Por meio da densidade de alvos, definimos, o livre caminho médio entre alvos sucessivos via [46].

$$\varphi = \frac{1}{2r_v\rho} \quad (4.2)$$

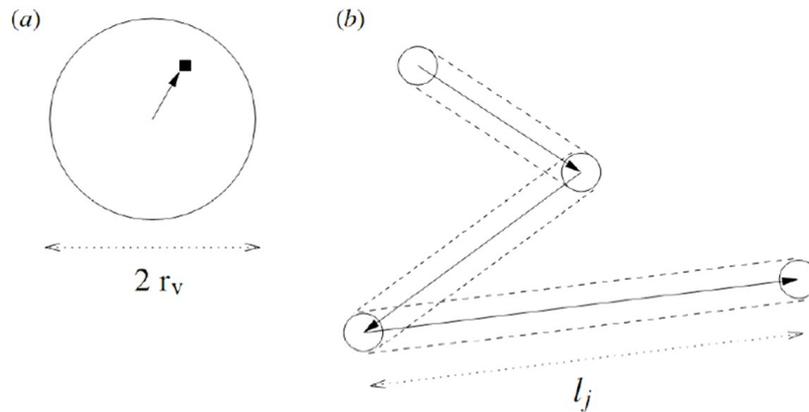
Embora extremamente simples, a figura 19 consegue capturar os elementos essenciais na dinâmica da busca. A existência de um raio de visão finito  $r_v$  introduz uma restrição espacial importante, bem como distingue claramente os dois mecanismos envolvidos nos limites de diferentes concentrações de sítios [46].

Defeitos podem ser introduzidos nesses espaços de busca diluindo a rede, ou seja, eliminando aleatoriamente uma certa fração de nós de uma rede inicialmente regular. Portanto, se  $n_0$  é o número inicial de nós em uma rede perfeita, então um coeficiente de fragmentação pode ser definido por

$$\chi = \frac{n_d}{n_0} \quad (4.3)$$

onde o número de defeitos  $n_d$  é equivalente ao número total de nós removidos ( $\chi = 1$  implica um espaço vazio – diluição total, destruição completa da rede).

Um ponto chave no problema de buscas aleatórias em redes regulares é determinar, para um dado conjunto de parâmetros do sistema, qual é o valor ótimo para  $\mu$  que maximize o ganho envolvido em encontrar alvos no menor caminho total ou tempo. A eficiência de busca, pode ser definida como a razão entre o número de sítios alvo visitados e a distância total média percorrida (média em  $M$  "passos/corridas") ou



**Figura 19:** Modelo de busca aleatória: (a) se um sítio-alvo (quadrado preto) está localizado dentro de um raio de visão  $r_v$ , então o buscador se move em linha reta até ele; (b) caso contrário, o buscador escolhe uma direção aleatória e um comprimento de passo  $l_j$  a partir de uma distribuição  $p(l)$  e incrementa seu deslocamento, procurando continuamente por um sítio dentro de um raio  $r_v$  ao longo de sua trajetória. [8]

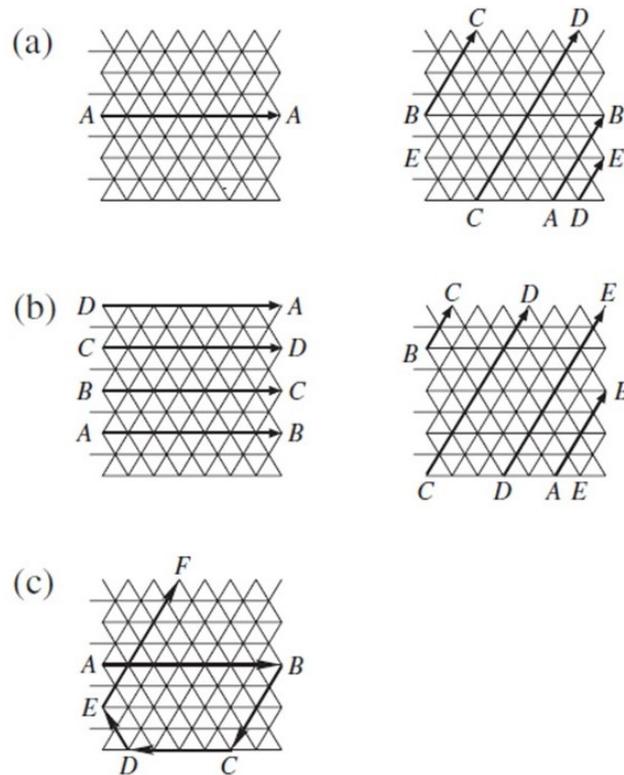
$$\eta(\mu) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{N_m}{L_m(\mu)} \quad (4.4)$$

aqui,  $L_m$  é a distância total percorrida no  $m_i$  "passos/corridas" para encontrar os locais de destino  $N_m$ . Nas simulações tomamos todos os  $N_m$  como tendo o mesmo valor fixo  $N$  [45]

Consideramos então um passeio aleatório com comprimentos de passo escolhidos a partir de uma distribuição assintótica de Lévy. A cada passo  $j$  o caminhante se move em linhas retas ao longo das direções permitidas pela treliça com defeitos, procurando constantemente por locais-alvo ao longo do caminho [44].

Devemos observar que para o caso particular de reticulados regulares sem defeitos, este tipo de análise foi levantou alguns resultados interessantes, revelando como estratégias distintas devem ser escolhidas para otimizar a busca aleatória dependendo das várias características da rede regular, como topologia e tipo de condições de contorno. A importância das condições de contorno no presente contexto surge devido à distribuição de passos e ao tamanho finito das redes. Assumindo uma rede bidimensional, com constante de rede  $s = 1$ . Cada nó se conecta aos seus vizinhos mais próximos em uma topologia triangular. Os autores [9] estudaram em 3 condições de contorno diferentes ilustrada na figura 20.

o modelo foi feito em diferentes condições de contorno periódicas e também em condições de contorno helicoidais, sendo a parede não especular, indicadas como na figura 20. Na ausência de defeitos, resultados numéricos usando o PBC, em três regimes de densidades alvo (baixa, intermediária e alta), e buscas destrutivas e não destrutivas, apontaram que a conectividade local geralmente afeta a eficiência da busca de forma mais drástica. apenas em baixas densidades. Embora a maioria dos resultados para reticulados sem defeitos se pareçam com os de paisagens



**Figura 20:** Três condições de contorno no caso de uma rede triangular livre de defeitos: (a) periódica, (b) helicoidal e (c) parede não especular . [10]

euclidianas, notamos que a possibilidade de trajetórias semelhantes a loops para um único passo como a PBC faz com que a eficiência de busca diminua para  $\mu < 2$  em baixa densidade de alvos, mesmo no caso destrutivo, característica não observada em buscas realizadas em ambientes contínuos. Portanto, neste regime de baixa densidade com o PBC, as eficiências da busca destrutiva e não destrutiva em redes livres de defeitos tornam-se semelhantes. No regime de densidade alvo intermediária, quando a taxa de truncamento já é alta, as bordas da rede raramente são acessadas em uma única etapa, e  $\gamma$  se torna essencialmente independente condição de contorno utilizada. Por fim, para alta densidade de alvos, praticamente todas as etapas são truncada e qualquer estratégia de busca é tão eficiente quanto a browniana [9].

#### 4.1 OBJETIVO

Observar a caminhada do cupim em diferentes geometrias, analisando características da caminhada com medidas que são comuns na física estatística. Como objetivo específico, realização de experimentos com cupins confinados em laboratório com as seguintes configurações de arenas:

- Arena circular;
- Arena retangular;
- Arenas anelares de diferentes espessuras;
- Labirinto

**Obtenção das séries temporais de posição em função do tempo;** Análise das séries obtidas, caracterizando as caminhadas por meio das seguintes medidas:

- Histograma da distribuição de tamanhos de passos;
- Deslocamento quadrático médio (MSD - Mean square displacement);
- Função de estrutura;
- Distribuição dos tempos de espera

## 5 METODOLOGIA

Os cupins estudados neste trabalho são do gênero *Cornitermes spp.*, eles estão agrupados na subfamília Nasutitermitinae. Uma ilustração dessa espécie é mostrada na figura 21. Os cupins do gênero *Cornitermes* constroem seus ninhos em forma de monte ou montículo e são comumente encontrados em área de pastagens, constituindo-se uma exceção quando encontrados em plantios homogêneos com espécies florestais [47].



**Figura 21:** *Cupins operários e soldados.*

Fonte: Foto tirada no campus

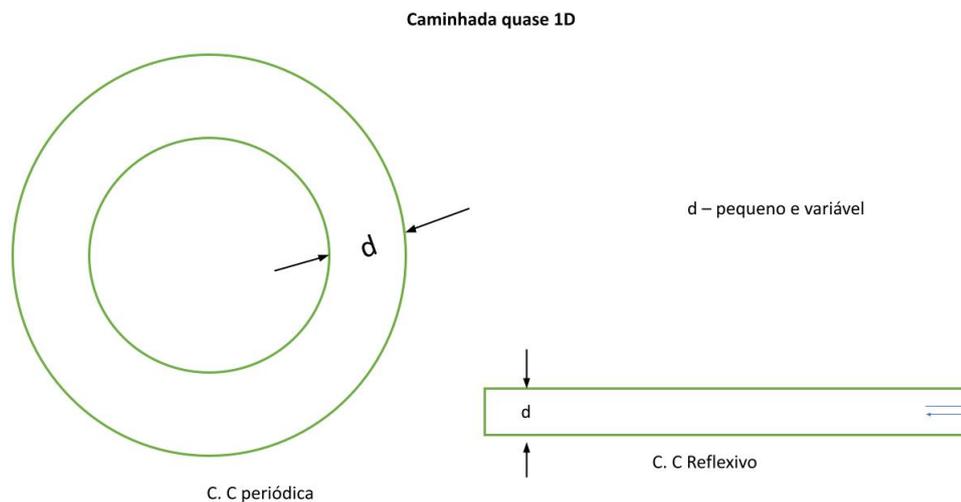
Os experimentos foram feitos no laboratório de Física Biológica da UFSJ, e foram utilizados cupins do tipo operário. Os cupins foram retirados do cupinzeiro e trazidos para o laboratório, a cada dia do processo de experimentação, sendo recolhidos também dados de temperatura e umidade. Foram utilizadas diferentes formas geométricas, tais como formas circulares (placas de Petri de diferentes raios) e labirinto, como também retangulares (túnel), para rastreamento do cupim. Cada série foi obtida utilizando um cupim diferente, ou seja, rastreamento de partícula única.

Os movimentos de organismos terrestres geram trajetórias contínuas, que geralmente são compostas por curvas e loops muito sinuosos que refletem a complexidade envolvida no movimento. Devido ao tamanho, formato da locomoção, bem como as características do terreno em que se movem, a maneira mais fácil de obter informações sobre seu movimento é filmar as posições espaciais ao longo do tempo, para posteriormente reconstruir suas trajetórias conectando as posições por meio de linhas retas. Então o movimento dos cupins foi capturado por uma câmera, por um período de 30 minutos. Os dados foram coletados por um programa

elaborado pelo prof. Sidney Geraldo Alves na linguagem Python e através de algoritmos foram calculadas as informações necessárias.

As figuras 22, 23 e 24 mostram de forma esquemática os modelos de caminhadas propostos, seguidos das suas condições de contorno. Os moldes, foram introduzidos em uma caixa de isopor que possuía em sua tampa uma câmera de filmagem a qual estava conectada ao computador que coletava os dados da caminhada. De maneira semelhante, os experimentos de túneis foram gravados com uma câmera acoplada a um tripé, a uma altura 31 cm, como mostra a figura 25.

Para simular uma caminhada quase unidimensional, utilizamos as arenas indicadas na figura 22. A largura  $d$  em ambos os casos é um pouco maior que as dimensões do cupim, sendo assim, a caminhada é aproximadamente unidimensional. A arena retangular, de comprimento  $L$ , representa as condições de contorno reflexivas, na qual o cupim encontra um "fim" (barreira) vertical e retorna o caminho no sentido contrário, de forma que o cupim caminha principalmente ou da esquerda para a direita ou no sentido oposto. Já para simular condições de contorno periódicas, as quais caracteriza um caminho "infinito", por não haver uma borda (barreira) vertical, podendo fazer uma volta completa de  $360^\circ n$  vezes. O cupim foi confinado entre duas placas de Petri, assim, a região onde ele podia caminhar corresponde a um anel estreito de espessura  $d$  dada pela diferença entre os raios da placa de Petri maior e a menor usados para delimitar a arena, o intuito de diminuir a espessura do caminho o qual o cupim se encontrava,



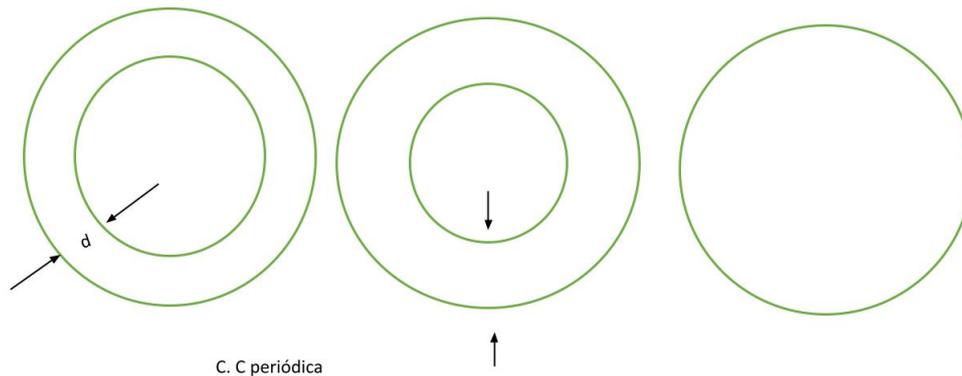
**Figura 22:** Molde de estrutura para caminhada quase 1D - A largura  $d$  é um pouco maior que as dimensões do cupim, sendo assim, a caminhada é aproximadamente unidimensional.

Fonte: desenhos criados pela autora

Também estamos interessados em caracterizar como o padrão de caminhada do cupim é modificado quando passamos de arenas quase-unidimensionais espessura de 1.5cm, e 2cm para arenas bidimensionais (livre). Na arena quase-unidimensionais o cupim conseguiu somente trocar o sentido direcional, ou seja meia volta, dificultando também a ocorrência de saltos tanto quanto o que é observado experimentalmente, quando um cupim encontra um obstáculo passivo,

por exemplo, uma parede de contêiner, ele o explorará brevemente e o ignorará, fazendo com que por exemplo, o cupim fique girando na borda (parte externa) [48], [49], uma forma de tentar impedir esse comportamento é introduzir barreiras, tais como apresentadas no modelo do labirinto. Para isso usamos as arenas indicadas na figura 23,

#### Caminhada transição de quase 1D para 2D

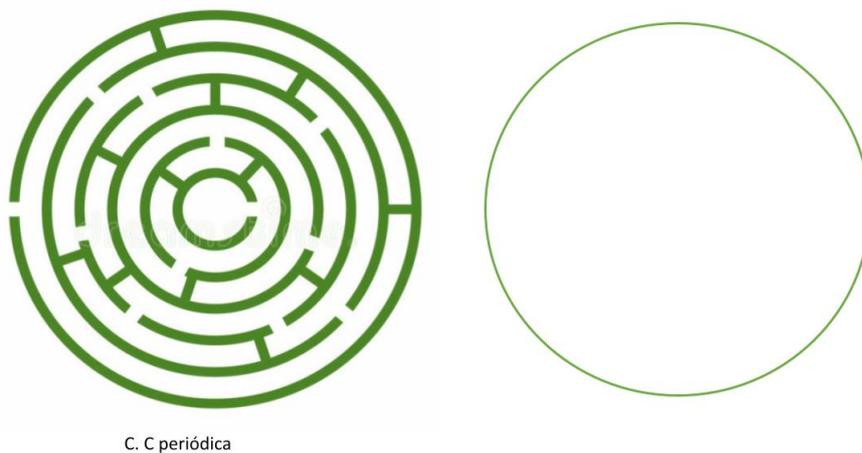


**Figura 23:** Molde de estrutura de transição.

Fonte: desenhos criados pela autora

Não há evidências que o cupim da voô de Levy, que tem como características longos saltos e passos pequenos entre eles, então propomos o labirinto com o intuito de dificultar esses longos saltos. O labirinto possui barreiras verticais entre os anéis de espessura de  $0.5\text{cm}$ ,

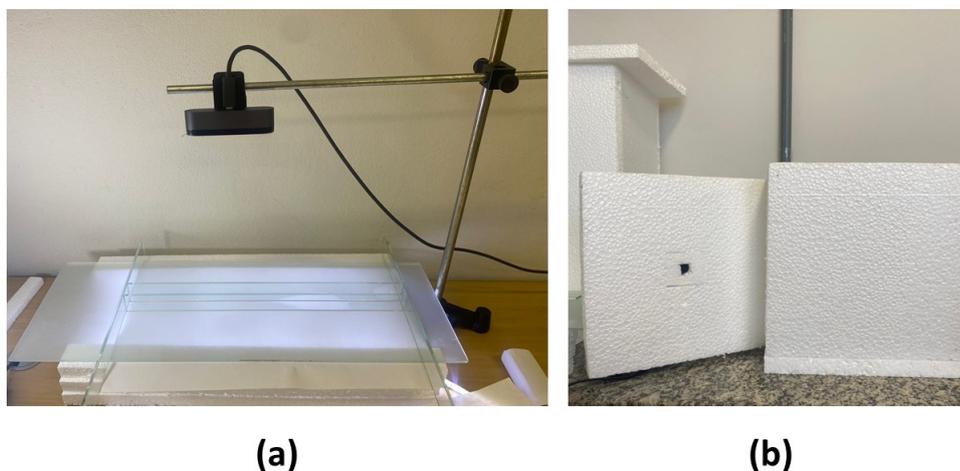
#### Labirinto



**Figura 24:** Molde de Labirinto

Fonte: desenhos criados pela autora

Na montagem de cada experimento era necessário tomar alguns cuidados com a iluminação para que rastreamento fosse facilitado. Por exemplo, foram adicionadas folhas de papel ofício



**Figura 25:** Equipamentos - Em (a) local onde ocorreu a gravação dos experimentos em túneis como também alguns de moldes circulares. Em (b) caixa de isopor onde a maior parte dos experimentos com moldes circulares foram realizados. Fonte: foto retirada pela autora

em cima do plafon de LED de formato quadrado que era o responsável pela iluminação dentro da caixa. Outro cuidado importante na montagem do experimento foi a utilização de papel filtro na placa de Petri, para que o cupim não deslizesse na placa, evitando assim que ele virasse na placa ou que seu movimento normal fosse dificultado. No caso de experimento com túneis o vidro utilizado era plano jateado (vidro de base), e lâminas de vidro liso de 51 cm de largura cada foram utilizadas para montar o experimento com diferentes espessuras. É importante destacar que durante todo o processo de experimentação, os cupins foram observados. Caso houvesse algum problema, como saírem das placas, ficarem virados de cabeça para baixo ou até mesmo morrerem, o experimento era interrompido. Convém ressaltar sobre os cuidados que tivemos durante um experimento e outro para que os feromônios dos cupins não atrapalhassem no movimento do cupim do experimento seguinte. A cada experimento os moldes foram lavados com água e detergente e deixados para secar naturalmente e um novo papel filtro foi utilizado. Como analisamos um único cupim (partícula), o experimento foi repetido 5 vezes para cada molde como mostra a tabela 1 a seguir, em um total de 35 experimentos.

A criação de alguns algoritmos foi necessária para análise da caminhada, tais como distribuição de tempos de espera, tamanhos de passos, deslocamento quadrático médio (MSD) e funções de estrutura. No forrageamento o tempo de espera pode ser entendido como o tempo gasto entre as atividades, ou seja, tomada de decisão. [50] Em uma abordagem comportamental, os tempos de espera podem ser originados no fato de que um organismo móvel realmente precisa de períodos de descanso entre as atividades. Uma série de estudos de forrageamento sobre as propriedades estatísticas dos tempos de espera relatam que estes se comportam como rajadas aleatórias que parecem ser sem escala e tão bem aproximadas por leis de potência, o que significa que curtos períodos de espera são frequentes, enquanto longos são raro [49].

| Forma     | Espessura | Nº de repetição |
|-----------|-----------|-----------------|
| Labirinto | -         | 5               |
| Circular  | -         | 5               |
| Anel      | 2 cm      | 5               |
| Anel      | 1.5 cm    | 5               |
| Túnel     | 1 cm      | 5               |
| Túnel     | 1.5 cm    | 5               |
| Túnel     | 2 cm      | 5               |

**Tabela 1:** Dados Experimentais criados para pesquisa.

Considerando uma caminhada do cupim podemos encontrar o tamanho dos seus passos.

Existem vários métodos para saber essa medida, O cupim se movimenta a maior parte do tempo nos experimentos, por isso essa medida é tão importante.

Queremos fazer a análise de distribuição de tamanho de passos do cupim, a primeira questão a ser investigada é o que seria um tamanho de passo, existem vários métodos para saber essa medida, cada um adequado para uma proposta diferente, um exemplo pode ser visto [51] no qual Andy M. Reynolds faz estudo sobre a caminhada de mexilhões, assim como no artigo [] Seguindo trabalhos anteriores do laboratório de pesquisa [49], [48], [52], podemos, então definir o tamanho de um passo como a distância entre as posições dois intervalos de tempos consecutivos e fixos.

Podemos calcular a distância total percorrida pelo cupim, assim como a velocidade média observada durante o intervalo de tempo em que foi rastreado. Em sequência podemos obter o deslocamento quadrático médio (MSD), que é uma medida da capacidade de dispersão (difusão) das partículas no sistema. Por meio dele podemos medir a evolução no tempo ou espaço do processo difusivo, sendo definido como a distância quadrática que o organismo avança a partir do ponto da origem ( $x_0$  e  $y_0$ ) do movimento para sua posição em um momento posterior  $t$ , calculando a média de um conjunto de trajetórias [2].

As funções de estrutura são funções de correlação generalizadas. Uma generalização do método de Kolmogorov é conhecida como funções de estrutura de ordem  $q$ . Essa função tem a vantagem de maior clareza para conjuntos de dados pequenos e permite a fácil identificação de não estacionaridade e escala multifractal nos dados por meio das propriedades de escala dos momentos de ordem superior [49], [2]. Se  $l(t)$  é a posição bidimensional do cupim no instante  $t$ , a fórmula de deslocamento é obtida por meio da equação:

$$|\Delta l(\tau_l)| = [\{x(t + \tau_l) - x(t)\}^2 + \{y(t + \tau_l) - y(t)\}^2]^{\frac{1}{2}} \quad (5.1)$$

onde  $x(t)$  e  $y(t)$  são a posição no tempo  $t$  e  $\tau_l$  é o comprimento do salto no tempo.

A fim de estudar os padrões de movimentos dos cupins em escala livre sob a estrutura de Kolmogorov, consideramos as trajetórias produzidas pela caminhada de indivíduos solitários representativos confinados em anéis circulares, placa de petri, labirinto e tunéis, onde os valores

do atraso de reescalonamento pode ser estimado pela equação (6.2) Para um processo não estacionário, a função de estrutura de ordem  $q$ ,  $|\Delta l(\tau_l)|^2$ , é definida como os momentos de ordem  $q > 0$  dos deslocamentos, em função do incremento  $\tau_l$ , veja equação (6.2).

Se o processo é invariante em escala e auto-similar em algum intervalo de incremento  $\tau_l$ , a função de estrutura é dimensionada como:

$$\langle |\Delta l(\tau_l)|^q \rangle \propto \tau_l^{\delta(q)} \quad (5.2)$$

relação conhecida como o expoente funcional dos momentos (*moment function exponent*). Esta é a principal ferramenta para caracterizar o processo. Por meio da equação (6.3) os seguintes casos podem ser definidos:

- Quando  $\delta(q) = \frac{1}{2}q$ , o processo tem as mesmas propriedades difusivas que o movimento browniano.
- Entretanto se  $\delta(q) \neq \frac{1}{2}q$ , então você tem difusão anormal. Se a função é não linear em  $q$ , o processo difusivo resultante é referido como multifractal por analogia com a caracterização multifractal de correlações e intermitência em fenômenos turbulentos.

Usando a equação (5.2) calculamos as funções de estrutura  $\langle |\Delta l(\tau_l)|^q \rangle$  das séries temporais  $x(t)$  e  $y(t)$ , em função de  $\tau_l$ , para momentos de ordem  $q = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  e  $8$ , onde a média é obtida sobre um conjunto de trajetórias. Observe que a última expressão é uma equação linear com inclinação que pode ser facilmente avaliada. Os expoentes de escala  $\delta(q)$  obedecem à relação:

$$\delta(q) = \varphi q \quad (5.3)$$

As propriedades das funções de estrutura para variáveis estocásticas com escalas auto-similares no tempo, cujas funções de densidade de probabilidade são auto-similares. Esta propriedade é satisfeita pelos voos Levy quando  $N \rightarrow \infty$  A relação entre os expoentes de escala das funções de estrutura e os voos de Levy é dada pela seguinte equação:

$$\varphi = \frac{1}{\mu - 1} \quad (5.4)$$

Fractais são objetos geométricos incapazes de serem classificados nos moldes da geometria tradicional devido principalmente, a três características que os distinguem das demais formas, são elas: auto-similares em diferentes níveis de escala, complexidade infinita e a mais marcante que é a dimensão [53]. Um sistema multifractal é uma generalização de um sistema fractal em que um único expoente não é suficiente para descrever sua dinâmica; em vez disso, um espectro contínuo de expoentes é necessário. Os sistemas multifractais são comuns na natureza.

## 6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Foram realizados 35 experimentos em sete diferentes geometrias, variando entre labirinto e anéis circulares com diferentes espessuras, assim como túneis com diferentes espessuras. A tabela 2 a seguir detalha a espessura como também a forma geométrica de cada experimento, que teve a duração de 30 minutos cada.

| Forma     | Raio externo (cm) | Espessura do anel (cm) | Área total da arena ( $cm^2$ ) |
|-----------|-------------------|------------------------|--------------------------------|
| Labirinto | 6.5               | 0.5                    | 132.27                         |
| Circular  | 6.25              | -                      | 122.72                         |
| Forma     | Raio externo (cm) | Espessura do anel (cm) | Área total da arena ( $cm^2$ ) |
| Anel      | 6.25              | 2.0                    |                                |
| Anel      | 6.25              | 1.5                    |                                |
| Forma     | Comprimento (cm)  | Largura (cm)           | Área total do túnel( $cm^2$ )  |
| Túnel     | 51                | 1.0                    | 51                             |
| Túnel     | 51                | 1.5                    | 76                             |
| Túnel     | 51                | 2.0                    | 102                            |

**Tabela 2:** *Dados Experimentais.*

Foi colocado apenas 01 cupim sem a presença de alimento ou água, em cada forma geométrica obedecendo as condições de contorno periódicas e reflexivas propostas, e o tempo de rastreamento. Calculou-se os tempos de espera, os tamanhos dos passos, o deslocamento quadrático médio (MSD) e a função de estrutura. Fizemos uma análise da difusão anômala onde o deslocamento médio quadrático (MSD) é estimado como base para identificar aspectos superdifusivos dos movimentos do cupim. A partir da teoria da difusão anômala, o expoente de escala do MSD indica se o regime difusivo é normal, super- ou subdifusivo. Avaliamos essas relações e as comparamos com os resultados que podem ser extraídos de uma análise de funções de estrutura de Kolmogorov [49].

As figuras de número 27 à 61 mostram o resultado desses algoritmos, as figuras estão plotadas em sequência de experimentos, lembrando que cada experimento foi realizado 5 vezes. A seguir discutiremos sobre os 5 experimentos realizados, de forma a deixar a análise dos diferentes parâmetros mais visíveis cada figura foi dividida em 6 partes, nelas descrevemos a trajetória em (a), a distribuição de tamanho de passos em (b), distribuição do tempo de espera em c, MSD em (d), função de estrutura em (f) e por fim em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de extrutura de ordem  $q$ .

O deslocamento dos operários foi estimado a partir do somatório dos quadrados das distâncias percorridas em ambos eixos (hipotenusa), para definir o tamanho de um passo [54]. A princípio teria que fazer o MSD em função do tempo e fazer médias sobre as amostras, mas quando assumimos que o sistema é ergótico (a média no tempo é equivalente entre o número de amostra),

podemos fazer médias no tempo para entender como o deslocamento quadrático médio varia com intervalos de tempo  $\Delta\tau$ , dessa forma o gráfico tem muito menos flutuações, menos ruídos, podendo assim, estimar um expoente para parte inicial do gráfico.

No MSD  $\langle \Delta\vec{r}_\tau(t)^2 \rangle$ , no qual  $\Delta\vec{r}_\tau(t) = [\vec{r}(t) - \vec{r}(t + \tau)]$  é o deslocamento do objeto no tempo  $t$  com um atraso  $\tau$ . A difusão normal, como no caso do movimento browniano, ocorre quando o MSD aumenta linearmente de modo que  $\langle \Delta\vec{r}_\tau(t)^2 \rangle = 2Dt$ , onde  $D$  é o coeficiente de difusão do objeto. Já em regimes difusivos onde MSD não é linear no tempo, são conhecidos como difusão anômala, ou seja, proporcional  $t^\alpha$  com  $\alpha \neq 1$ . Além disso,  $\alpha$  é o expoente de difusão e quando  $\alpha < 1$ , o processo é chamado subdifusivo, e se  $\alpha > 1$ , o processo é chamado superdifusivo.

Sistemas físicos onde a superdifusão e os vôos de Lévy foram identificados pela primeira vez juntos e teoricamente relacionados entre si, foram estudados em grande detalhe até agora. Esses sistemas incluem o transporte de partículas passivas em fluidos não lineares onde o movimento do fluido pode ser retardado na fronteira de regiões com diferentes vetores de velocidade. Tais regiões causam “aderências” que resultam em distribuições de cauda longa, tanto nas distâncias percorridas quanto nos tempos de espera. A superdifusão e os vôos de Lévy estão relacionados [49], mas pode-se observar um comportamento superdifusivo que não corresponde a um vôo de Levy. A superdifusão e os expoentes de escala de Lévy, na qual os expoentes  $\alpha$  e  $\mu$  são teoricamente relacionados por uma expressão simples:

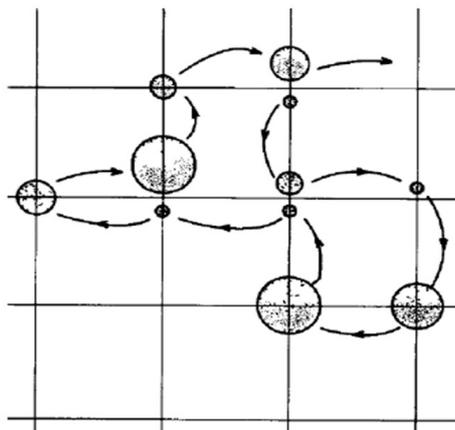
$$\mu = 4 - \alpha \quad (6.1)$$

Iremos agora discutir sobre a parte (a) de cada figura de 27 à 61. Com relação ao anel de espessura 1.5 figura 27 à 31, observarmos a trajetória da caminhada do cupim ao longo do experimentos, percebemos que este percorreu toda a área circular do anel, na figura 28, foi possível verificar que o cupim percorreu o caminho em "zig-zags". Já o anel de espessura 2cm, este também percorreu a trajetória de forma a forma um anel, como podemos visualizar nas figuras de 37 à 41, mas percebemos também um tendência do cupim em "visitar" mais a borda externa do anel. As figuras de 32 à 36, mostram a trajetória no labirinto, podemos observar que nessa forma geométrica o cupim não percorreu todos os espaço como pode ser visto nas figuras, entretando continuamos a observar uma tendência com relação a borda externa do recipiente. Quando observamos o cupim na arena livre, é a ainda mais perceptível, essa tendência de caminha para a borda. Com relação aos túneis fizemos medidas para 1cm, 1.5cm e 2cm, podemos observar como a trajetória foi construída, assim como as diferentes espessuras nas quais eles estavam, na figura 47 a trajetória não está em uma linha reta e sim inclinada, devido a forma de gravação, na qual a câmera estava inclinada, na 49 podemos observar que o cupim permaneceu mais nas bordas verticais do que passos pelo "meio do caminho", já na figura 53 uma tendência pela borda vertical direita, os demais percorrem o caminho como um todo.

A parte (b) descreve o histograma de tamanho de passos. Para as figuras de 27 à 61, imaginemos um caminhante aleatório com comprimentos de passos distribuídos seguindo essas

distribuições. A presença de grandes probabilidades associadas a passos menores indica que as trajetórias que foram geradas é composta principalmente por passos de comprimento muito curto, enquanto o efeito do máximo secundário é a introdução mais frequente de passos de comprimento médio. Etapas de comprimentos muito grandes são eventos muito raros. O decaimento inicial mostrado nas figuras se assemelha a uma lei de potência, embora a presença do máximo secundário, também indique a presença de outro tipo de processo no movimento. Em algumas figuras podemos observar um decaimento em lei de potência, como no labirinto figura 32, 34, sem barreira figura 45 e túnel 1.5cm figura 53.

Na parte *c* das figuras representamos a distribuição dos tempo de espera. Em uma abordagem comportamental, os tempos de espera podem ser originados no fato de que um organismo móvel realmente precisa de períodos de descanso entre as atividades. As decisões que os animais tomam sobre quanto tempo esperar entre as atividades podem determinar o sucesso de diversos comportamentos, como forrageamento, formação de grupo ou prevenção de riscos. Surpreendentemente, para diversas espécies animais, incluindo humanos, os padrões espontâneos de tempos de espera mostram uma 'explosão' aleatória que parece invariável em escala. Os expoentes de escala que quantificam as proporções de esperas curtas e frequentes a raras e muito longas são específicas da espécie, sendo determinadas por características como modo de forrageamento (predação ativa versus emboscada), tamanho do corpo e preferência pela presa [49], [55]. Sendo assim, tomamos como exemplo do caminhante aleatório que realiza um passeio em uma grade regular, figura 26 que possui a característica de esperar um tempo  $\tau_w$  em cada sítio antes de executar o próximo salto. Este tempo  $\tau_w$  é chamado de tempo de espera e é uma nova variável aleatória e independente, que é escolhida a cada novo salto de acordo com uma distribuição  $f(\tau_w)$ .



**Figura 26:** Representação de um caminhante aleatório contínuo no tempo. [2]

Por simplicidade, escolhemos que essa nova variável não seja correlacionada com os comprimentos dos passos. Se os tempos de espera forem distribuídos de acordo com:

$$f(\tau_w) \propto \tau_w^{-\lambda} \quad (6.2)$$

Os tempos de espera são definidos em função do número de dados consecutivos em que o cupim não mudou de posição. O resultado da distribuição estatística dos tempos de espera é semelhante a uma lei de potência, como podemos ver nas figuras 32 à 36, que apresentam o labirinto, o anel circular de espessura  $2\text{cm}$ , também mostra esse caráter de lei de potência no experimento 39, na figura 37 e 40 maior frequência em 1 e 2, na figura 38 temos uma maior persistência em 1. Para anel circular de  $1.5\text{cm}$ , as figuras 27, 29, 31 mostram uma frequência maior de paradas para tempo 1, já a figura 28 mostra que o cupim não parou em nenhum momento. Com relação aos túneis os tempo de espera também apresentam um comportamento em lei de potência, somente no experimento 60 o cupim permaneceu no tempo 1.

Como pode ser observados nas figuras de 27 à 61, na qual a parte ( $d$ ) representa os valores de  $\alpha$ , os cupins estudados exibem difusão anômala (pois  $\alpha > 1$ ) em seus padrões de caminhada. Ou seja, deslocamento quadrático médio cresce mais rápido do que na difusão normal de uma partícula browniana (onde  $\alpha = 1$ ). É possível observar que o MSD cresce com o tempo e depois sofre oscilações, essa saturação ocorre por causa do tamanho limitado (finito) das formas estudadas, e as oscilações estão relacionadas à menor amostragem à medida que consideramos intervalos de tempo maiores.

Para simular uma caminhada quase unidimensional, utilizamos as arenas indicadas na figura 22. A largura  $d$  em ambos os casos é um pouco maior que as dimensões do cupim, sendo assim, a caminhada é aproximadamente unidimensional. A arena retangular, de comprimento  $L$ , representa as condições de contorno reflexivas, na qual o cupim encontra um "fim"borda (barreira) vertical e retorna o caminho no sentido contrário, de forma que o cupim caminha principalmente ou da esquerda para a direita ou no sentido oposto. As figuras de 47 à 51 representam o caminho em um túnel de  $1\text{cm}$ , como podemos observar na parte  $a$  que representa a trajetória do cupim, esse teve o comportamento superdifusivo com uma média de  $\alpha = 1.8804 \pm 0,0548$  para os experimentos. Agora vamos observar as figuras de 52 à 56 representam o caminho em um túnel de  $1.5\text{cm}$ , assim como no túnel anterior podemos observar na parte  $a$  da figura a trajetória do cupim, esse teve o comportamento superdifusivo com uma média de  $\alpha = 1.8799 \pm 0,0551$  para os experimentos. E para finalizar as trajetórias no túnel figura 57 à 61, temos a última medida de  $2\text{cm}$  cm, assim como no túnel anterior podemos observar na parte  $a$  da figura a trajetória do cupim, esse teve o comportamento superdifusivo com uma média de  $\alpha = 1.8209 \pm 0,0588$  para os experimentos. Já para simular condições de contorno periódicas, as quais caracteriza um caminho "infinito", por não haver uma borda (barreira) vertical, podendo fazer uma volta completa de  $360^\circ$   $n$  vezes. O cupim foi confinado entre duas placas de Petri, assim, a região onde ele podia caminhar corresponde a um anel estreito de espessura  $d$  dada pela diferença entre os raios da placa de Petri maior e a menor usados para delimitar a arena, o intuito de diminuir a espessura do caminho o qual o cupim se encontrava. era tendenciar uma diminuição

do  $\alpha$ , expoente que caracteriza a difusão do sistema, entretanto podemos observar a partir da figura 27 à 31, na parte *a*, que mostra os resultados para o anel circular de espessura 1.5cm, que o  $\alpha$  teve o comportamento superdifusivo com uma média de  $\alpha = 1.9099 \pm 0,0433$  para os experimentos. De forma análoga fizemos para espessura de 2cm, obtivemos um  $\alpha$  médio de  $\alpha = 1,894 \pm 0,0212$  para espessura de 2cm, observar as figuras de 37 à 41. Usamos também o labirinto como um artifício de modificar esse padrão de caminhada, uma vez que, esse possui barreiras verticais entre os anéis de espessura de 0.5cm, entretanto isso não impossibilitou a ocorrência de saltos "longos", por mais que de todos os experimentos esse foi que obteve em algumas replicatas o menor  $\alpha$ , mas ainda sim com média de  $\alpha = 1,7782 \pm 0,0929$ . Em relação às condições de contorno, notamos primeiro que elas desempenham um papel significativo no processo de otimização de busca apenas quando o buscador atinge as bordas da rede com uma certa frequência, dependendo da topologia da rede, podem levar uma trajetória semelhante a um loop que retorna a si mesma após percorrer uma distância  $L$ , uma trajetória que varre apenas uma fração da rede ou uma trajetória que cobre toda a malha. [49].

Em (*e*), para melhor elucidar a difusão anômala, nos experimentos, utilizaremos um método bem conhecido para caracterizar o comportamento potencial em escala livre estudado por Andrey Kolmogorov no contexto de fluxos turbulentos. Calculamos as funções de estrutura para  $q$  de 1 até 8, sendo possível observar um crescimento em lei de potência, ajustando a equação (5.1) pelo método dos mínimos quadrados, por meio dos expoentes fizemos os gráficos indicado na parte (*f*), no qual o valor  $\delta(q)$  foi associado a cada  $q$ , das figuras de 27 à 61 e o ajuste foi linear, portanto podemos constatar que o processo é multifractal, ser multifractal.

Nas tabelas a seguir 3 e 4 plotamos os expoentes  $\delta(q)$  em função de  $q$  com o ajuste de mínimos quadrados para encontrar  $\mu$  utilizando equação (6.4) e por parametro de comparação utilizamos o MSD equação (6.1) para encontrar  $\mu$ .

A superdifusão é um padrão de movimento observado em uma ampla gama de organismos que se acredita estar relacionado a estratégias de busca ótimas. Aqui mostramos que os cupins realizam deslocamentos superdifusivos, sugerindo que esse padrão de movimento é importante para o desenvolvimento de interações sociais sobre as quais a auto-organização no nível da colônia é construída.

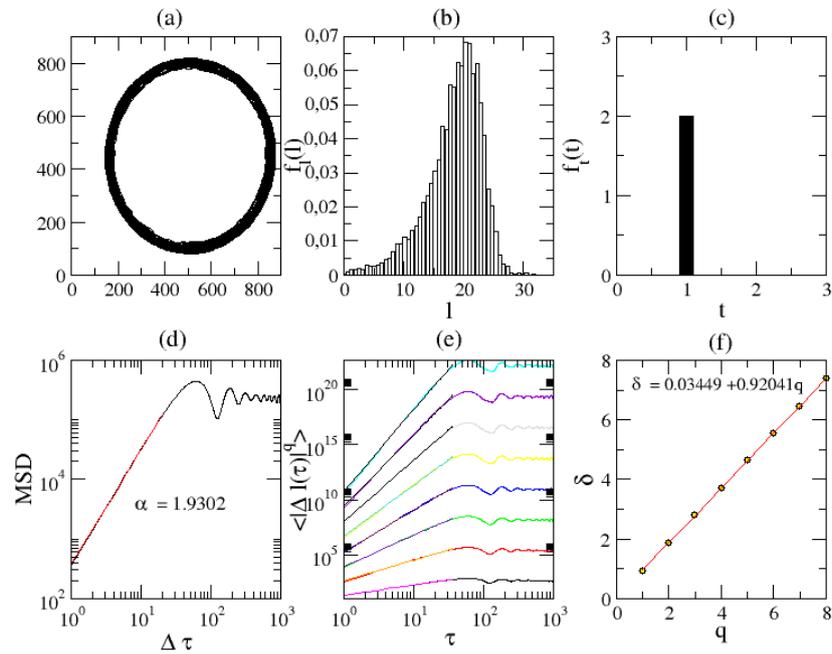
Os resultados mostram que o deslocamento livre de cupins, no espaço e no tempo, apresenta padrões auto-similares altamente consistentes com difusão anômala. Em animais sociais, companheiros de ninho interativos são recursos valiosos a serem procurados, e isso é alcançado movendo-se de maneira eficiente. O que é mais interessante é o fato de os cupins testados exibirem superdifusão e vôos de Lévy mesmo na ausência de estímulos ou pistas externas: as arenas não continham comida nem outros companheiros de ninho. Parece, portanto, que tal padrão de movimento é de fato programado em “instintos” de cupins.

| Anel de espessura 2cm                  |          |      |                    |
|--|----------|------|--------------------|
| $\alpha$                               | $\delta$ | MSD  | Expoente de escala |
| 1.8743                                 | 0.9090   | 2.13 | 2.10               |
| 1.8772                                 | 0.6888   | 2.12 | 2.45               |
| 1.9321                                 | 0.921    | 2.07 | 2.09               |
| 1.9011                                 | 0.9430   | 2.10 | 2.06               |
| 1.8853                                 | 0.9488   | 2.11 | 2.07               |
| Anel de espessura 1.5cm                |          |      |                    |
| $\alpha$                               | $\delta$ | MSD  | Expoente de escala |
| 1.9302                                 | 0.9204   | 2.07 | 2.09               |
| 1.8247                                 | 0.8976   | 2.18 | 2.11               |
| 1.9384                                 | 0.9453   | 2.06 | 2.06               |
| 1.9181                                 | 0.9488   | 2.08 | 2.05               |
| 1.9385                                 | 0.9519   | 2.06 | 2.05               |
| Circunferência sem barreira $R = 6.25$ |          |      |                    |
| $\alpha$                               | $\delta$ | MSD  | Expoente de escala |
| 1.6967                                 | 0.7959   | 2.30 | 2.26               |
| 1.8673                                 | 0.9332   | 2.13 | 2.07               |
| 1.8838                                 | 0.8749   | 2.12 | 2.14               |
| 1.8586                                 | 0.9169   | 2.12 | 2.14               |
| 1.8446                                 | 0.9134   | 2.16 | 2.09               |
| Labirinto $R = 6cm$                    |          |      |                    |
| $\alpha$                               | $\delta$ | MSD  | Expoente de escala |
| 1.655                                  | 0.7632   | 2.35 | 2.31               |
| 1.6887                                 | 0.8299   | 2.31 | 2.20               |
| 1.8999                                 | 0.8984   | 2.10 | 2.11               |
| 1.8418                                 | 0.7685   | 2.16 | 2.30               |
| 1.807                                  | 0.7707   | 2.19 | 2.06               |

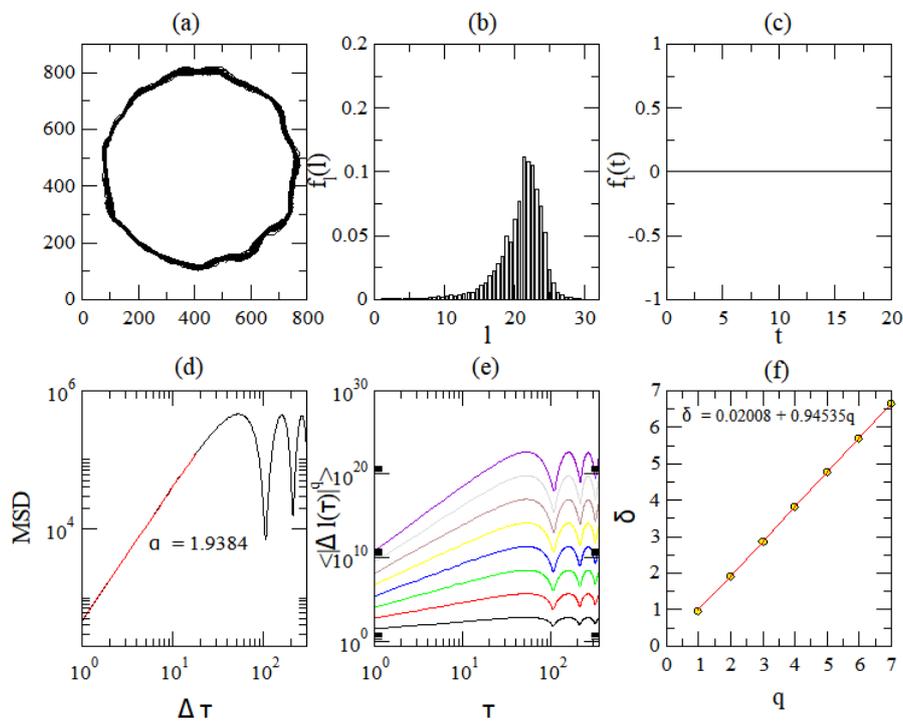
**Tabela 3:** Valores de  $\mu$ , utilizando diferentes métodos, referentes ao experimentos circulares.

| Túnel 1cm                              |          |      |                    |
|--|----------|------|--------------------|
| alpha                                  | $\delta$ | MSD  | Expoente de escala |
| 1.9375                                 | 0.9441   | 2.06 | 2.10               |
| 1.9252                                 | 0.9698   | 2.07 | 2.45               |
| 1.7858                                 | 0.9529   | 2.21 | 2.09               |
| 1.8967                                 | 0.9542   | 2.10 | 2.06               |
| 1.8869                                 | 0.9447   | 2.11 | 2.07               |
| Anel de espessura 1.5cm                |          |      |                    |
| alpha                                  | $\delta$ | MSD  | Expoente de escala |
| 1.9054                                 | 0.943    | 2.09 | 2.06               |
| 1.8993                                 | 0.9427   | 2.07 | 2.03               |
| 1.9143                                 | 0.9339   | 2.06 | 2.07               |
| Circunferência sem barreira $R = 6.25$ |          |      |                    |
| alpha                                  | $\delta$ | MSD  | Expoente de escala |
| 1.7445                                 | 0.6195   | 2.26 | 2.61               |
| 1.8064                                 | 0.9082   | 2.20 | 2.10               |
| 1.9182                                 | 0.9477   | 2.08 | 2.05               |
| 1.7878                                 | 0.8832   | 2.21 | 2.13               |
| 1.8479                                 | 0.8322   | 2.15 | 2.20               |

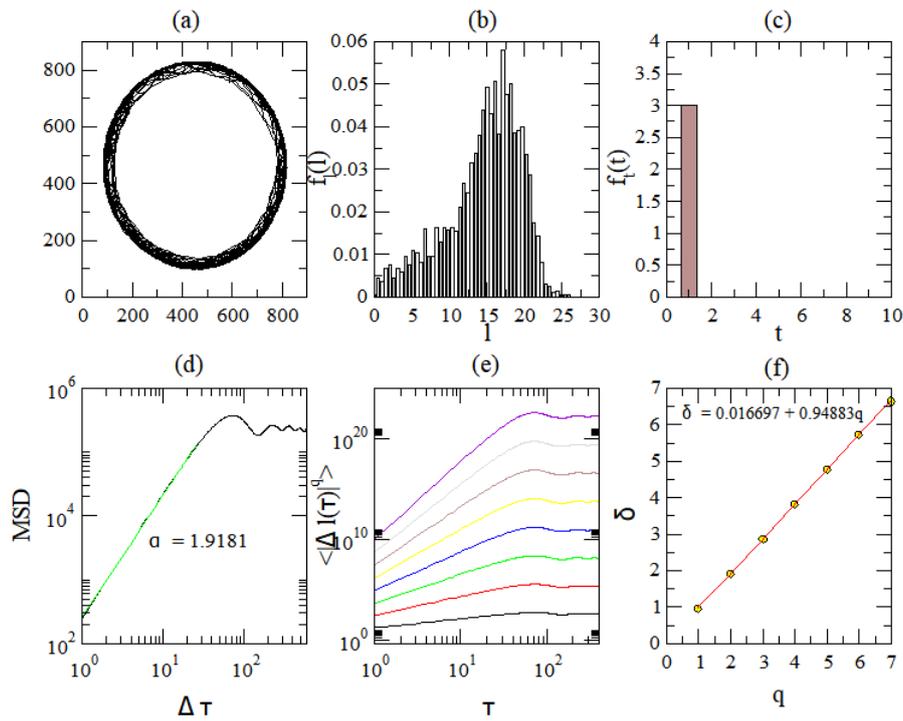
**Tabela 4:** Valores de  $\mu$ , utilizando diferentes métodos, referentes ao experimentos retangulares.



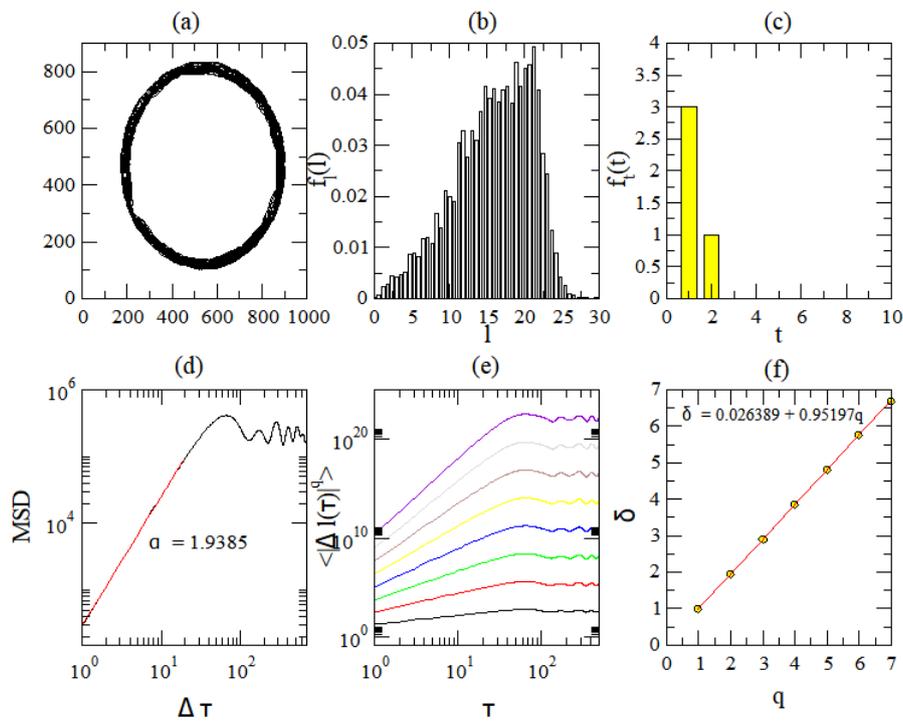
**Figura 27:** Experimento 515, Em (a) trajetória no anel circular ( $r = 5\text{cm}$ ,  $R = 6.25\text{cm}$ ,) de espessura de  $1.5\text{cm}$ , histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



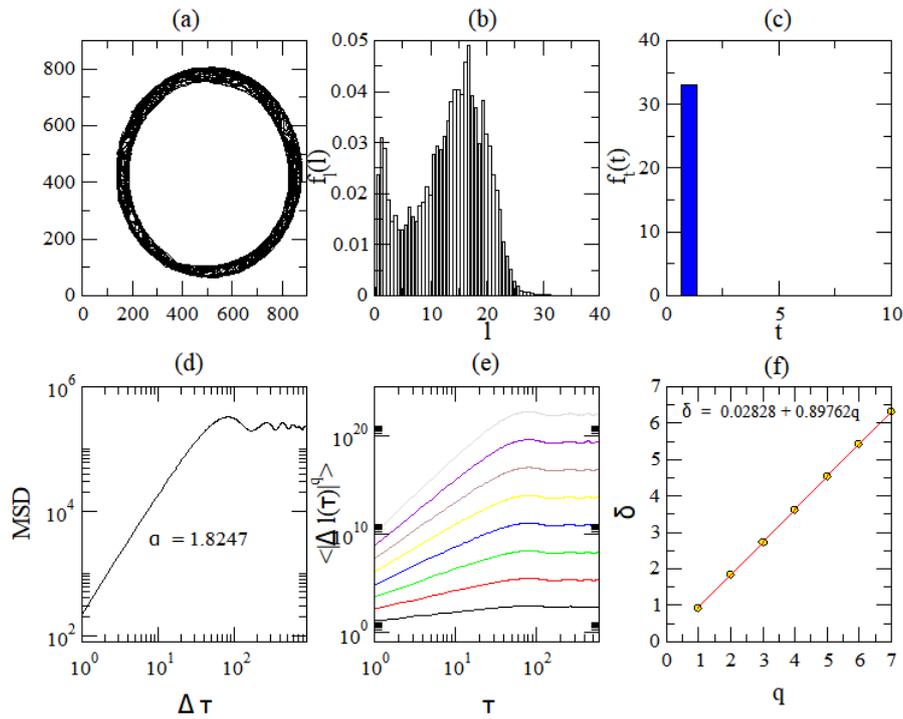
**Figura 28:** Experimento 515f, Em (a) trajetória no anel circular ( $r = 5\text{cm}$ ,  $R = 6.25\text{cm}$ ,) de espessura de  $1.5\text{cm}$ , histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



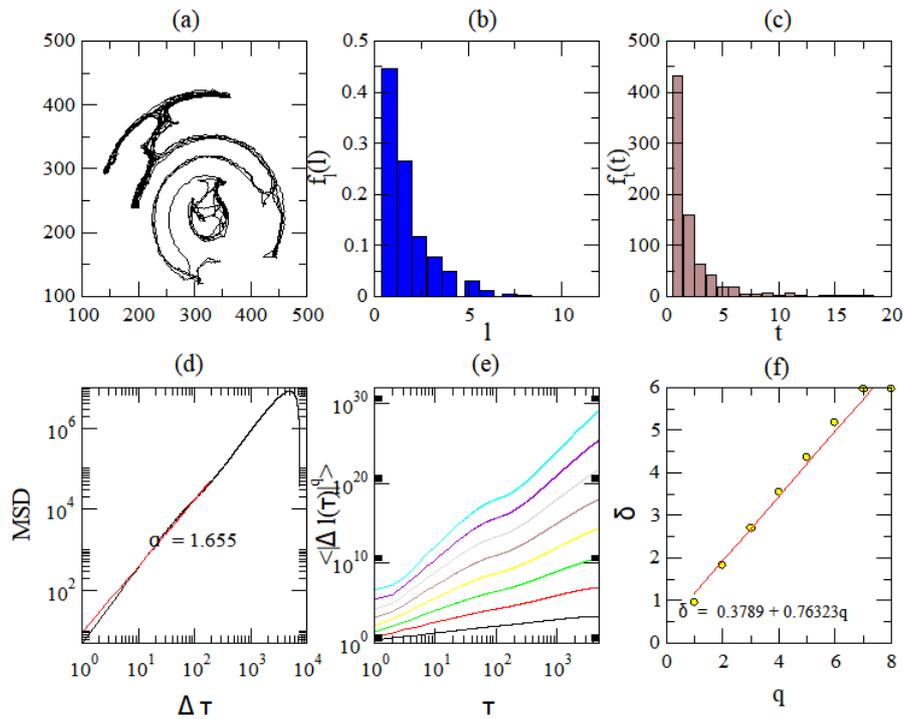
**Figura 29:** Experimento 515d, Em (a) trajetória no anel circular ( $r = 5\text{cm}$ ,  $R = 6.25\text{cm}$ ,) de espessura de 1.5 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



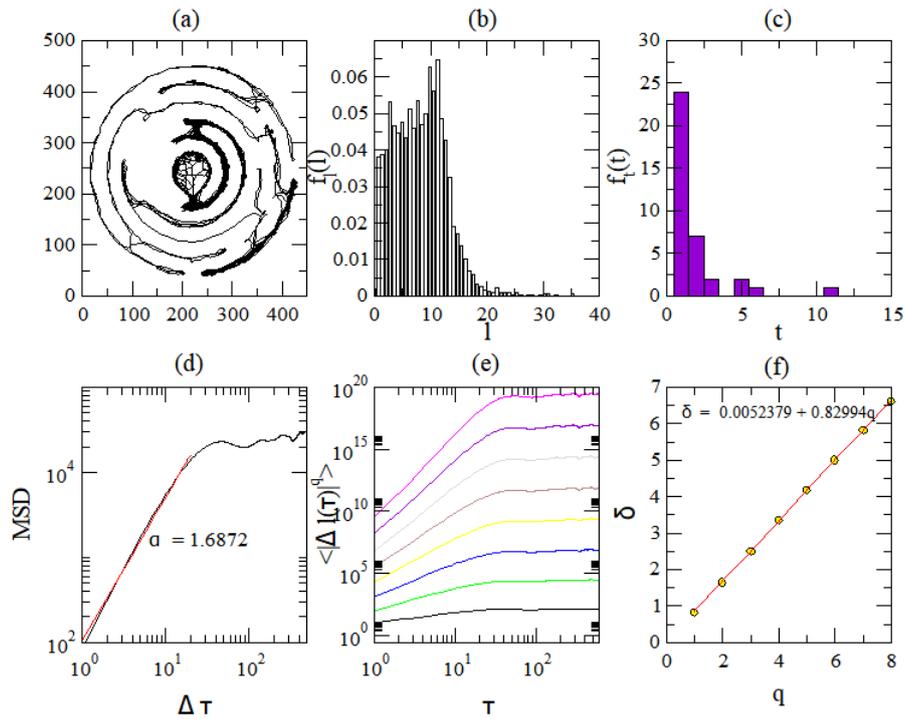
**Figura 30:** Experimento 515e, Em (a) trajetória no anel circular ( $r = 5\text{cm}$ ,  $R = 6.25\text{cm}$ ,) de espessura de 1.5 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



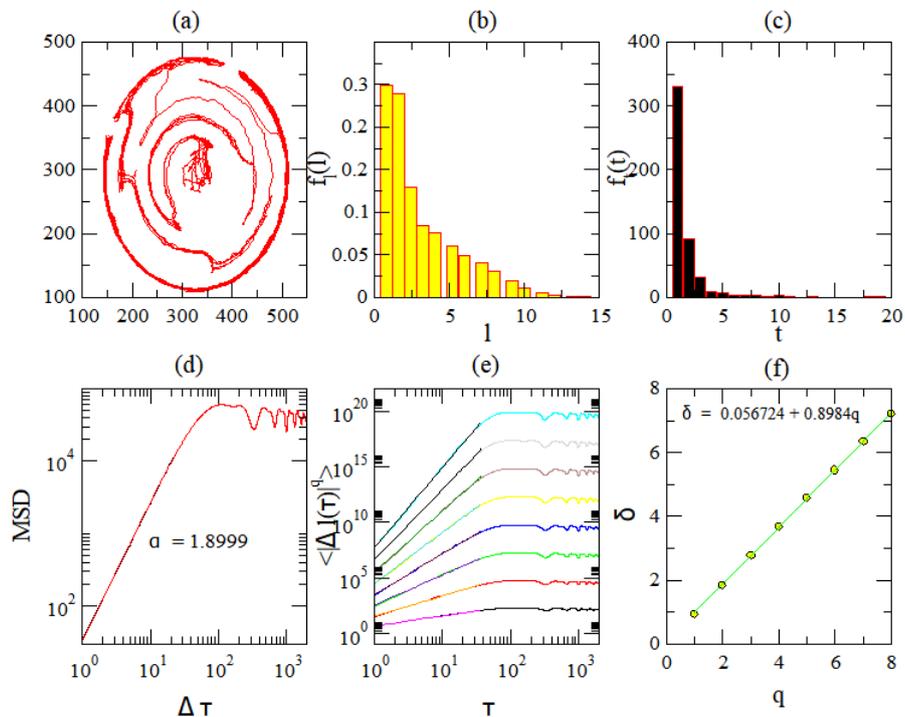
**Figura 31:** Experimento 515c, Em (a) trajetória no anel circular ( $r = 5\text{cm}$ ,  $R = 6.25\text{cm}$ ,) de espessura de  $1.5\text{cm}$ , histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



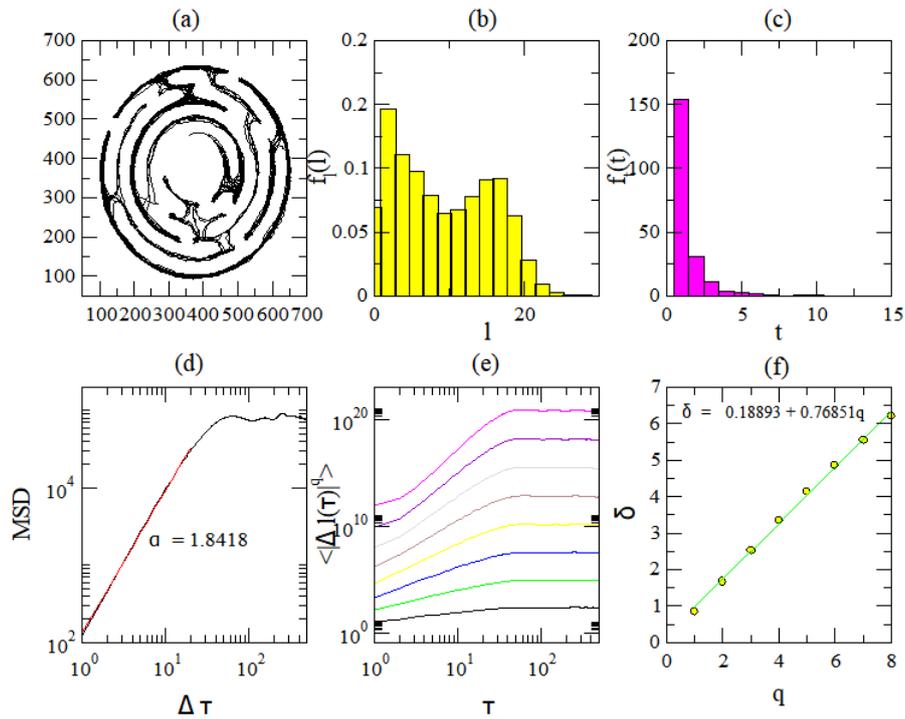
**Figura 32:** Experimento 147, Em (a) trajetória no labirinto, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



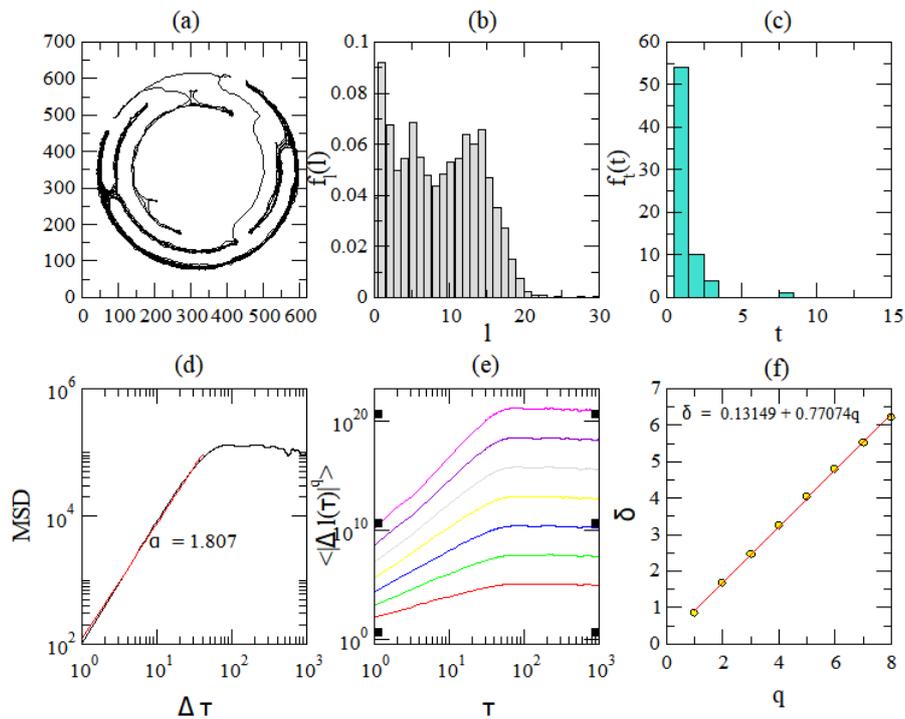
**Figura 33:** Experimento 201, Em (a) trajetória no labirinto, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



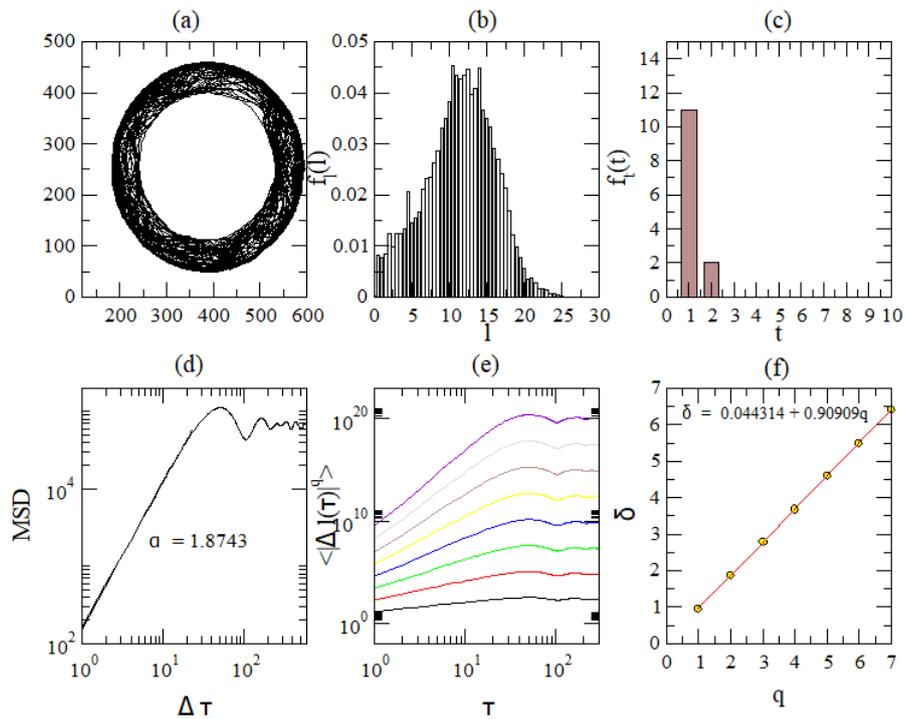
**Figura 34:** Experimento 503, Em (a) trajetória no labirinto, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



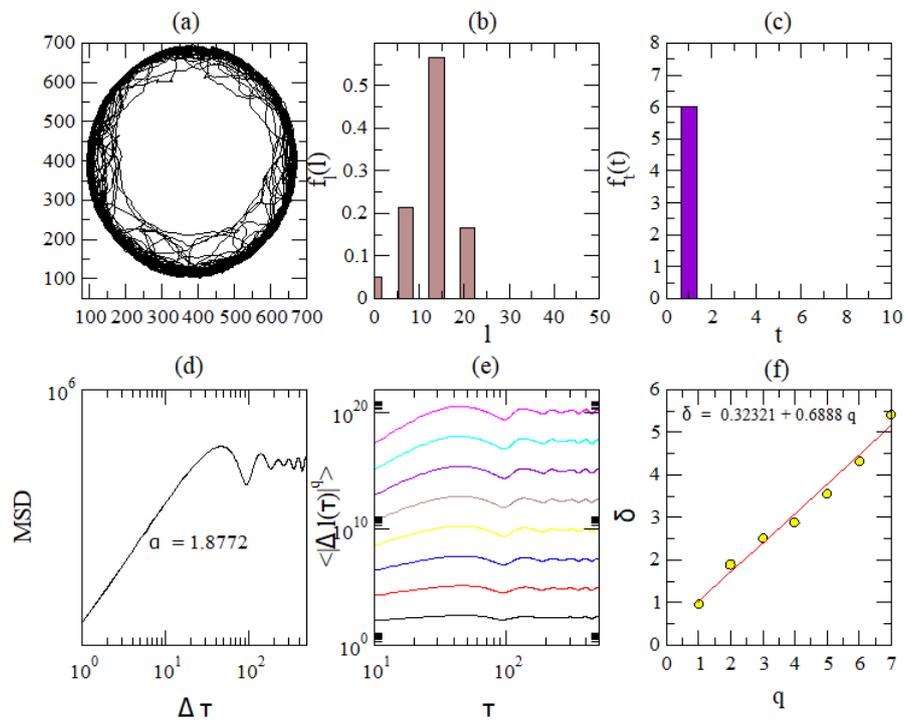
**Figura 35:** Experimento 503a, Em (a) trajetória no labirinto, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



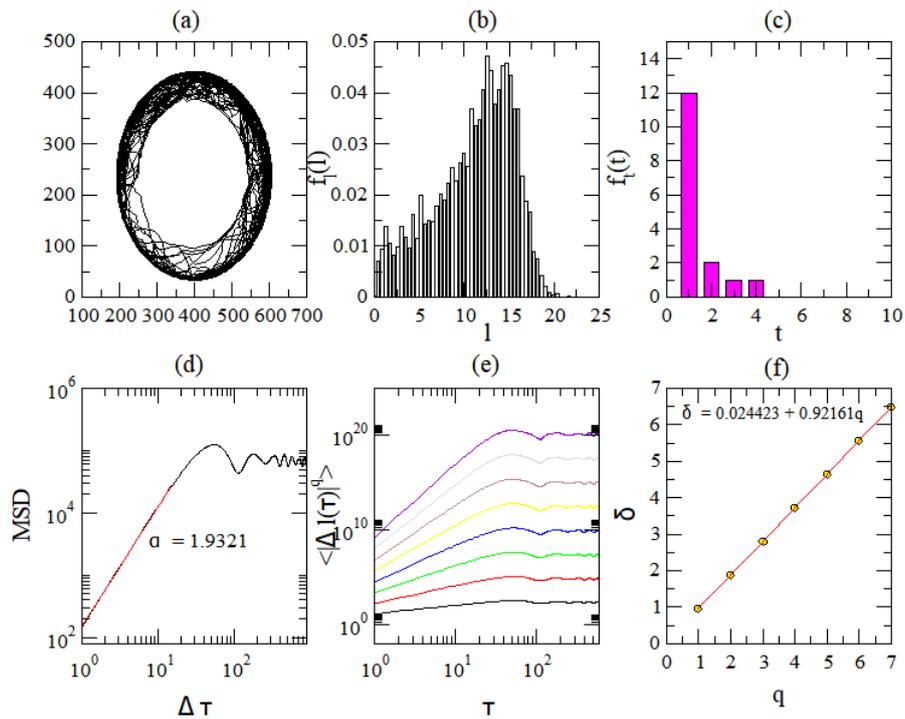
**Figura 36:** Experimento 503b, Em (a) trajetória no labirinto, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



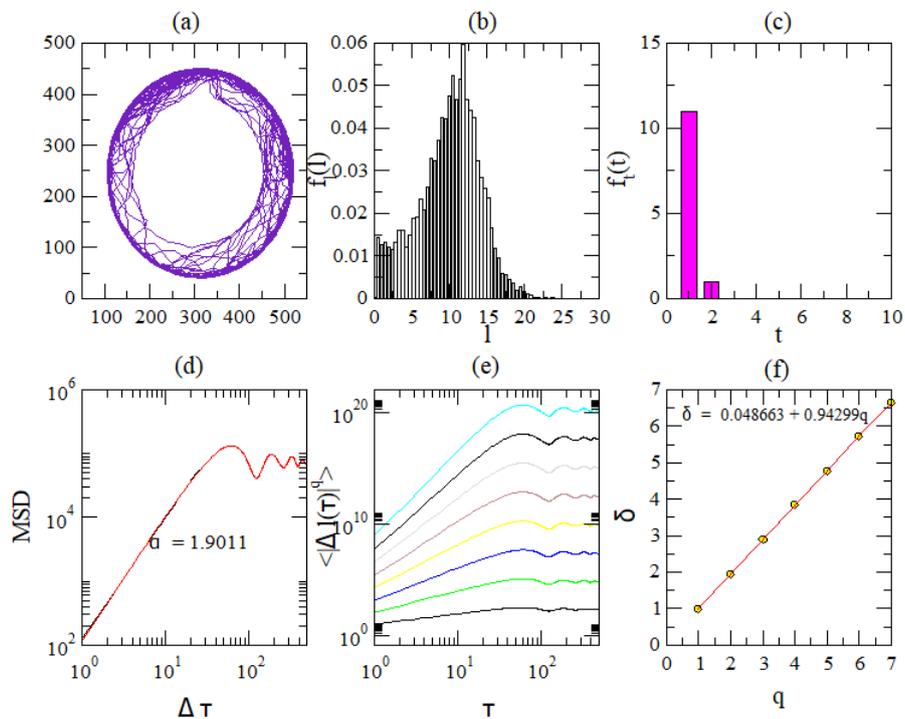
**Figura 37:** Experimento 508, Em (a) trajetória no anel circular de espessura 2 cm ( $r = 4.5$ ,  $R = 6.25$ ), histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



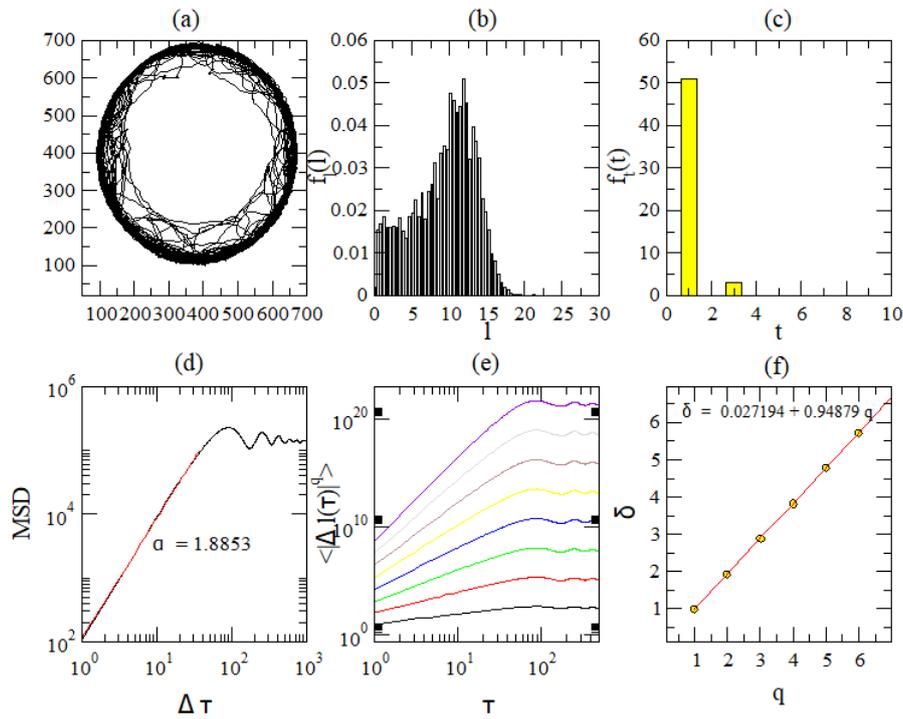
**Figura 38:** Experimento 508a, Em (a) trajetória no anel circular de espessura 2 cm ( $r = 4.5$ ,  $R = 6.25$ ), histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



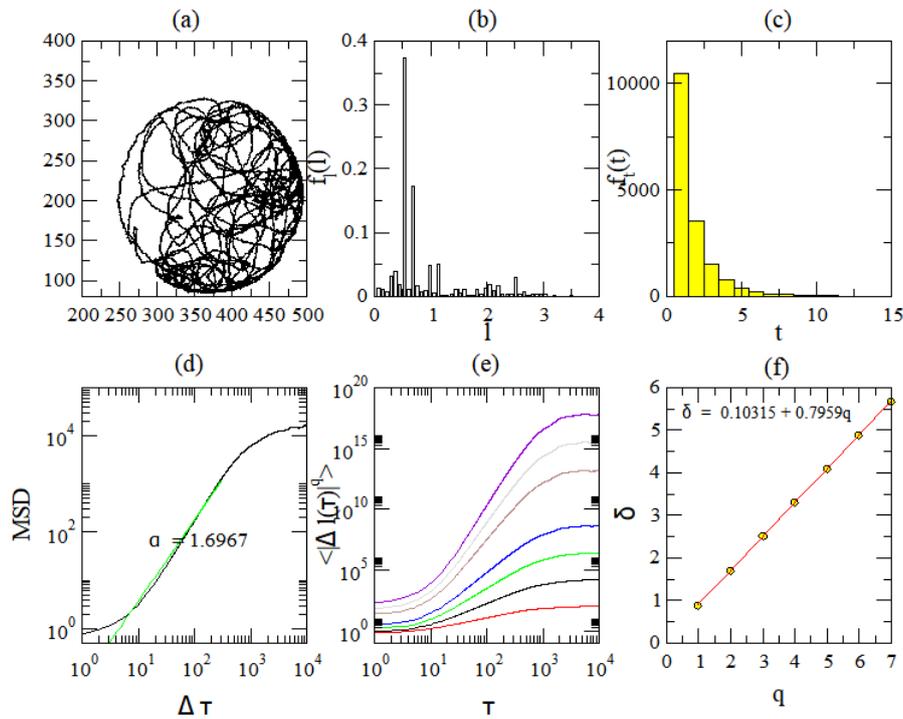
**Figura 39:** Experimento 508b, Em (a) trajetória no anel circular de espessura 2 cm ( $r = 4.5$ ,  $R = 6.25$ ), histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



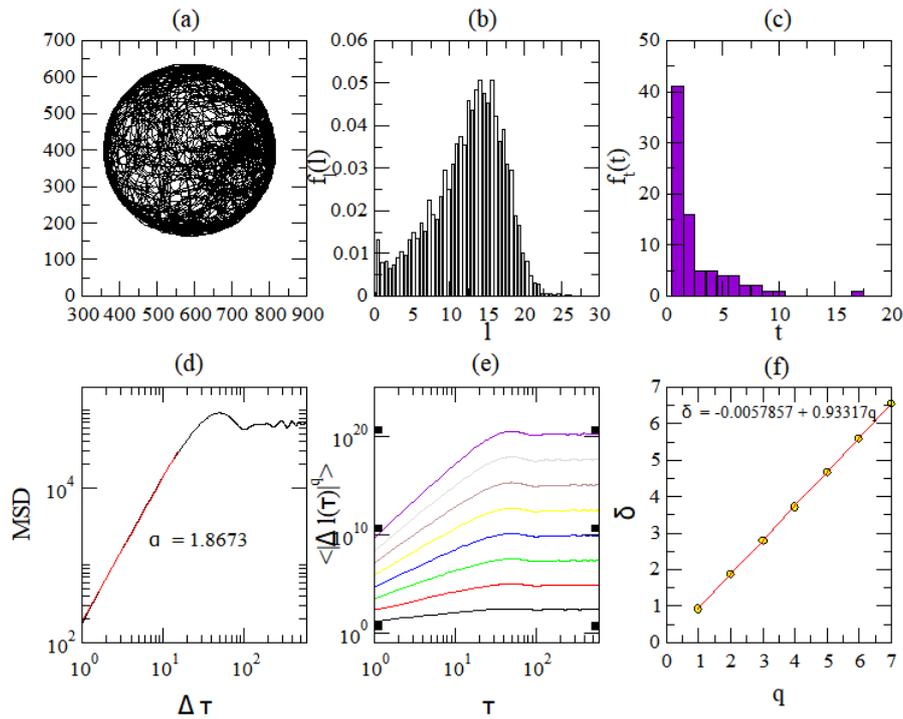
**Figura 40:** Experimento 508c, Em (a) trajetória no anel circular de espessura 2 cm ( $r = 4.5$ ,  $R = 6.25$ ), histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



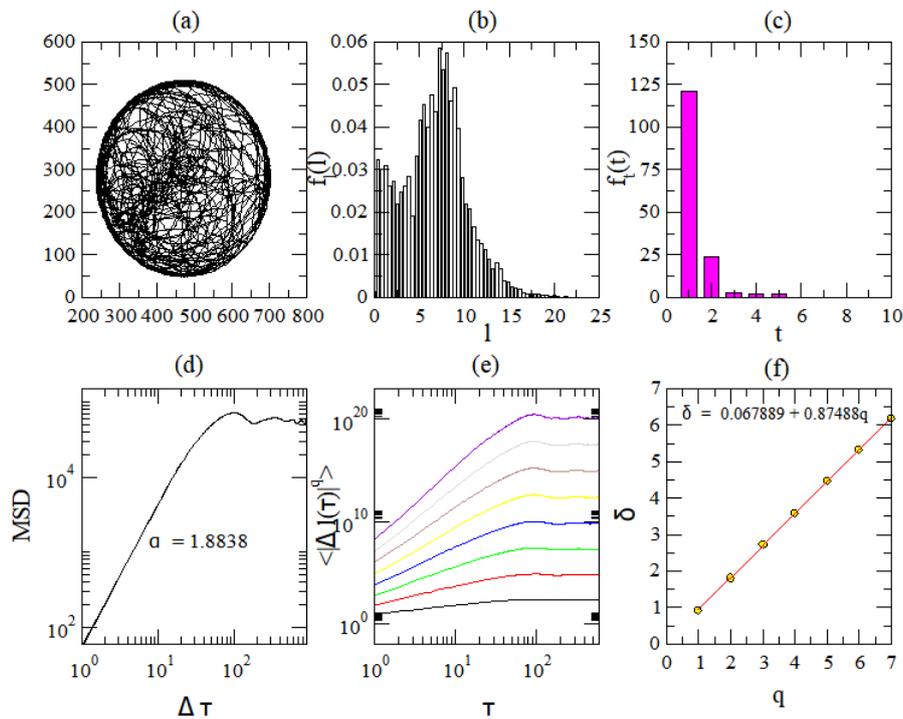
**Figura 41:** Experimento 508d, Em (a) trajetória no anel circular de espessura 2 cm ( $r = 4.5$ ,  $R = 6.25$ ), histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



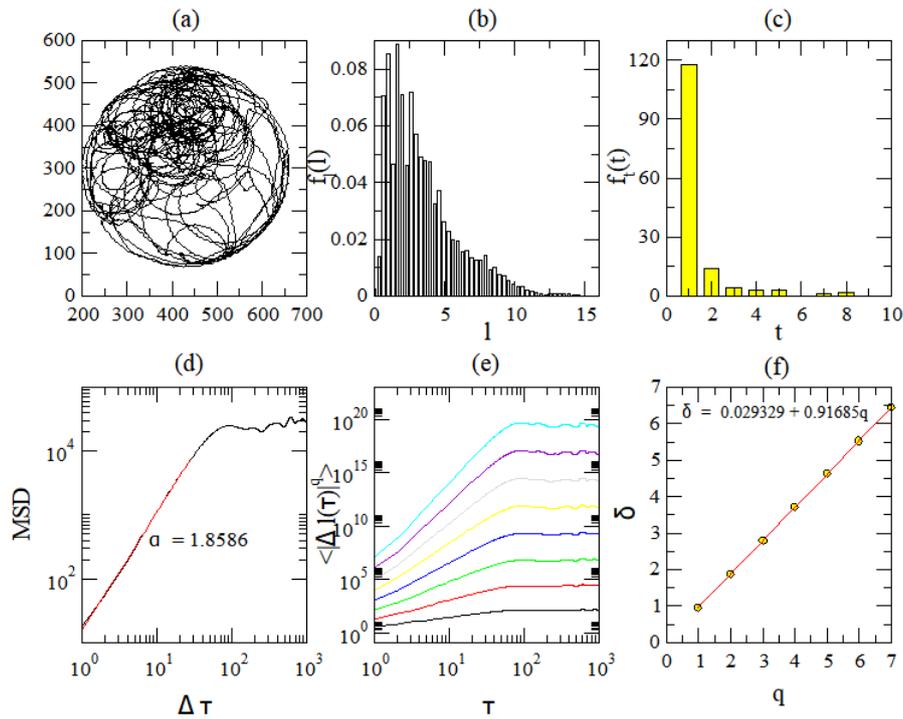
**Figura 42:** Experimento 520b, Em (a) trajetória na placa de petri ( $R = 4.5$ ), histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



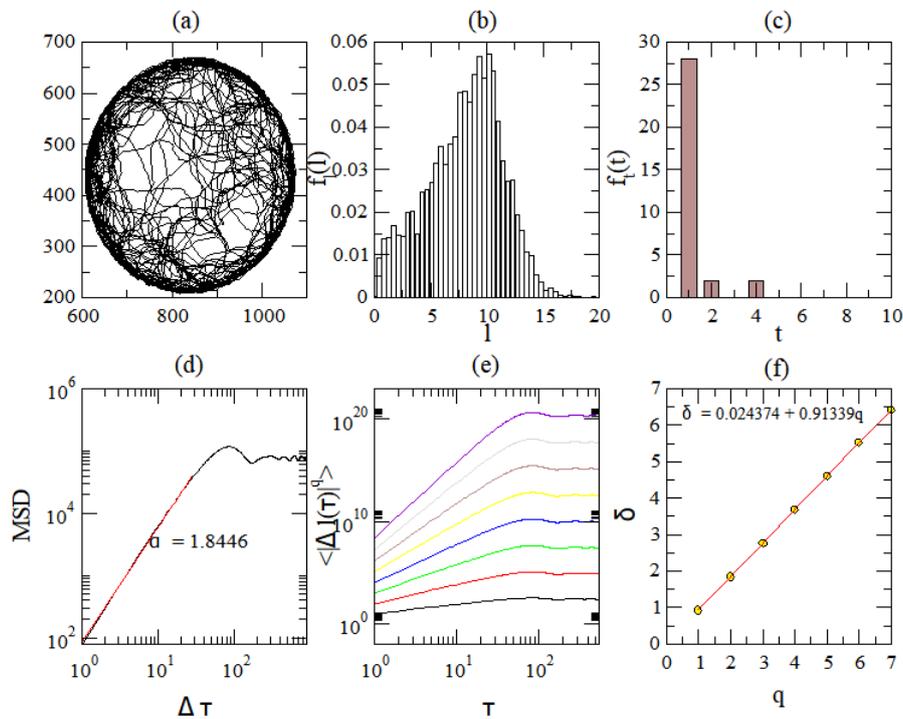
**Figura 43:** Experimento 523b, Em (a) trajetória na placa de petri ( $R = 4.5$ ), histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



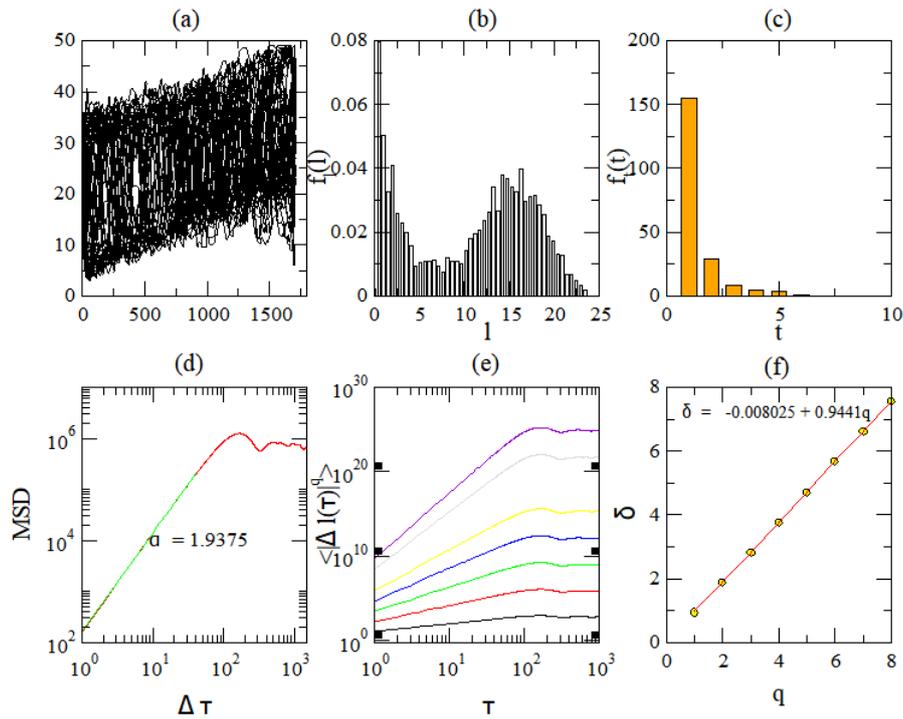
**Figura 44:** Experimento 520d, Em (a) trajetória na placa de petri ( $R = 4.5$ ), histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



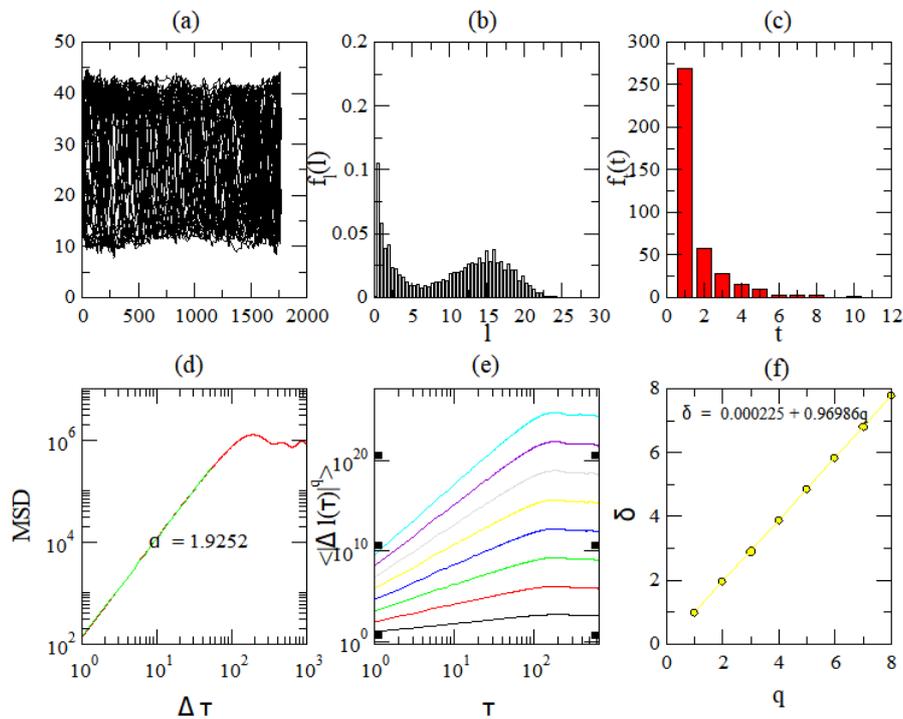
**Figura 45:** Experimento 520g, Em (a) trajetória na placa de petri ( $R = 4.5$ ), histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



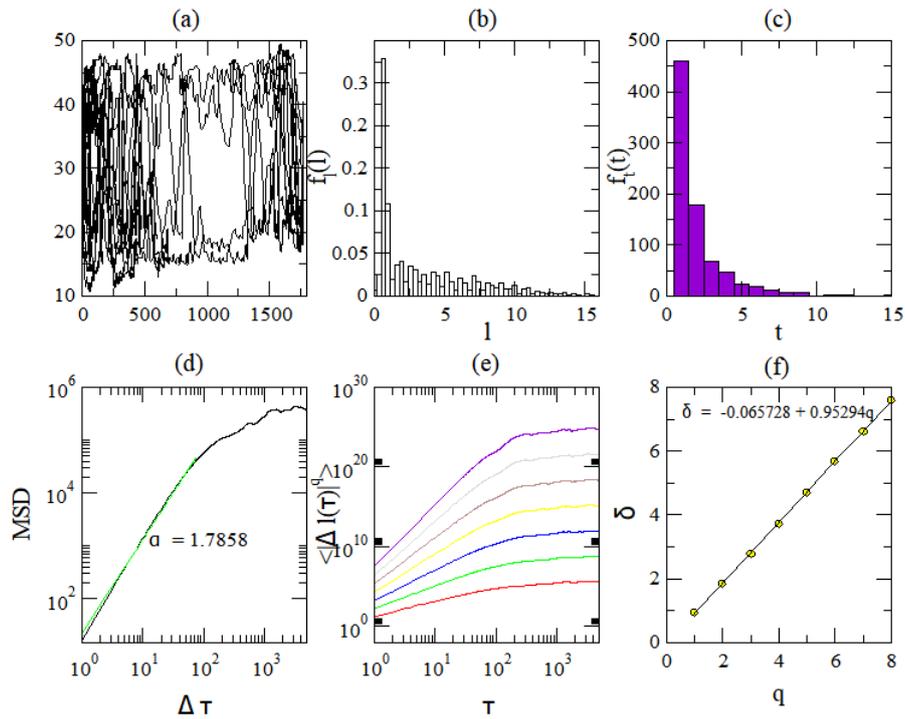
**Figura 46:** Experimento 521, Em (a) trajetória na placa de petri ( $R = 4.5$ ), histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



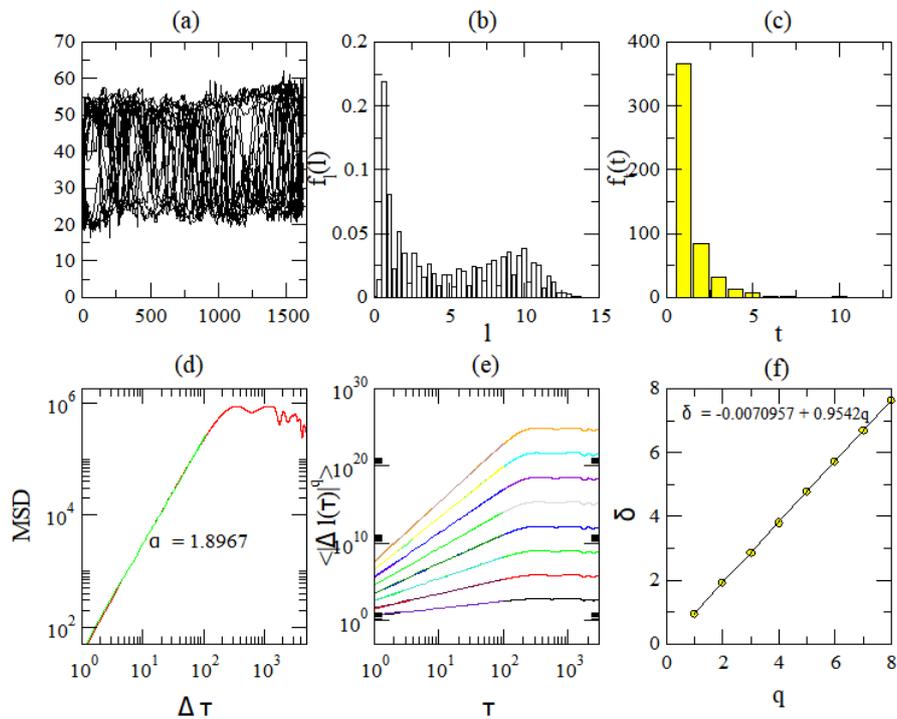
**Figura 47:** Experimento 509, Em (a) trajetória túnel de espessura 1 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



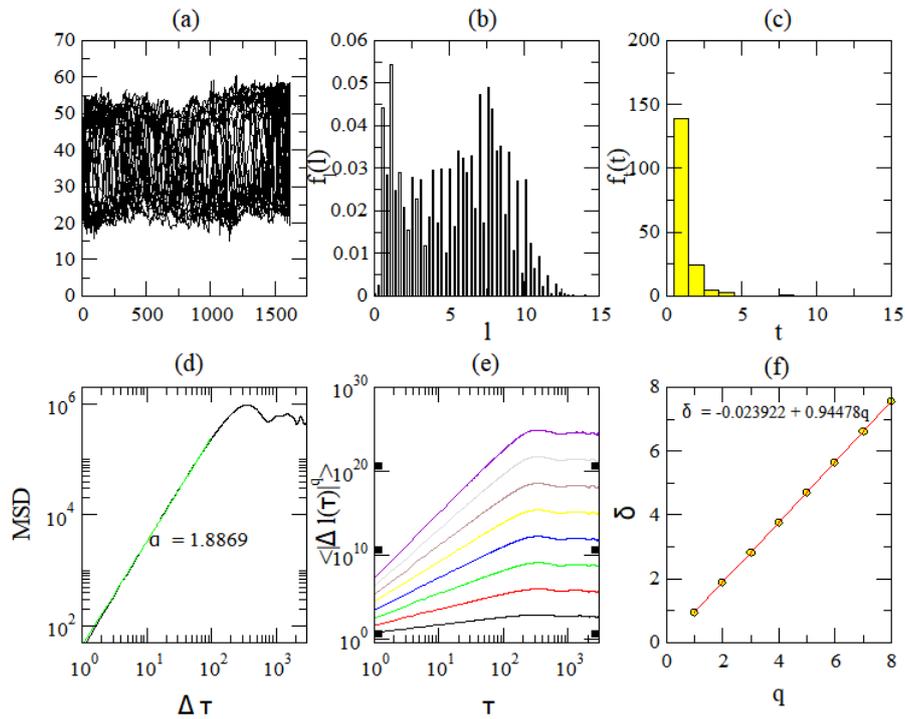
**Figura 48:** Experimento 509a, Em (a) trajetória túnel de espessura 1 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



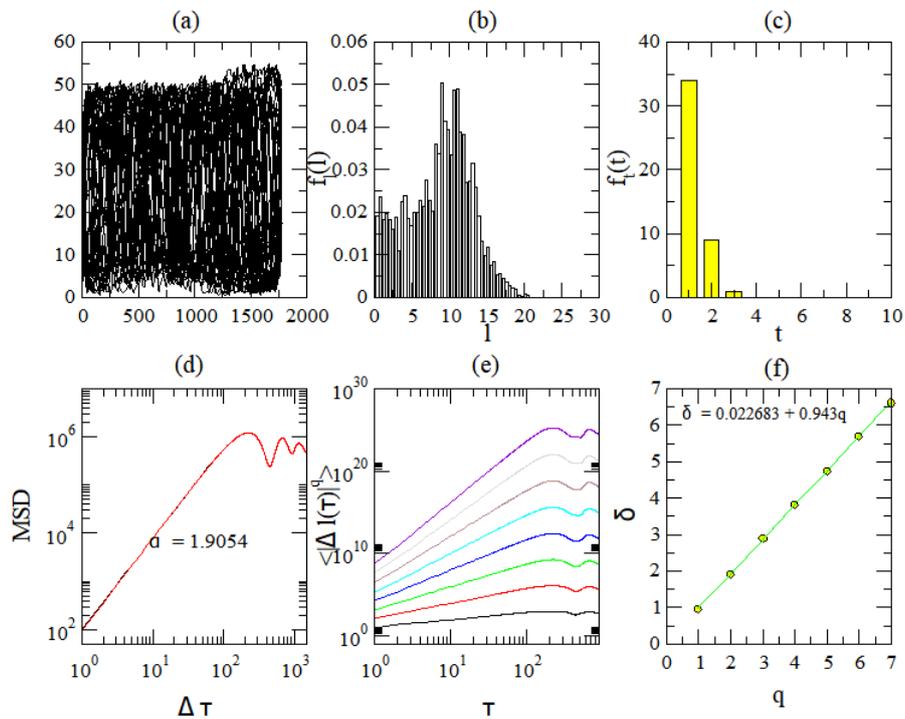
**Figura 49:** Experimento 509b, Em (a) trajetória túnel de espessura 1 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



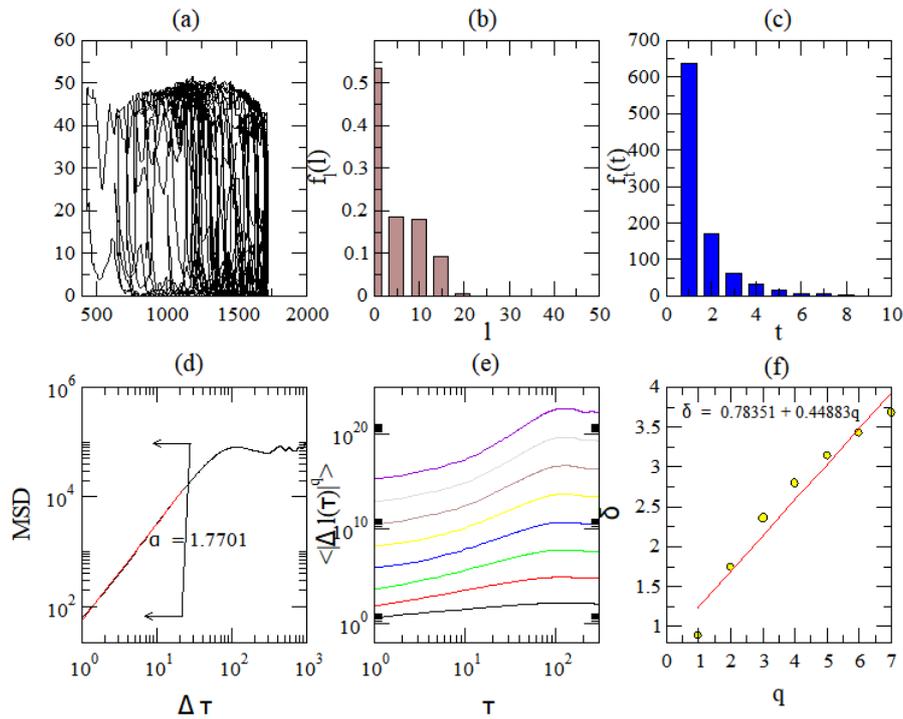
**Figura 50:** Experimento GM2, Em (a) trajetória túnel de espessura 1 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



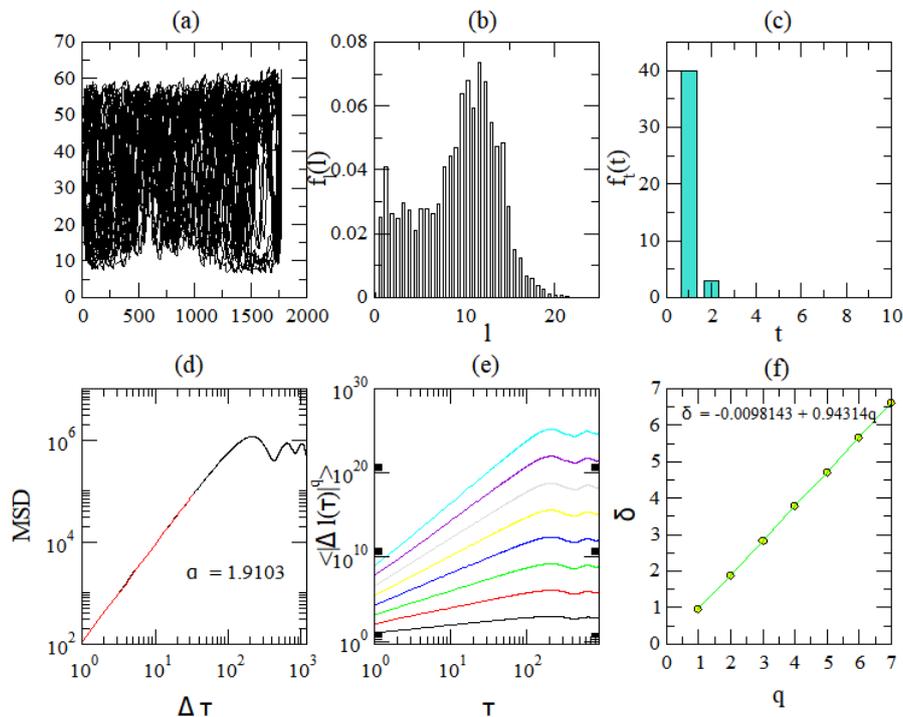
**Figura 51:** Experimento GM3, Em (a) trajetória túnel de espessura 1 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



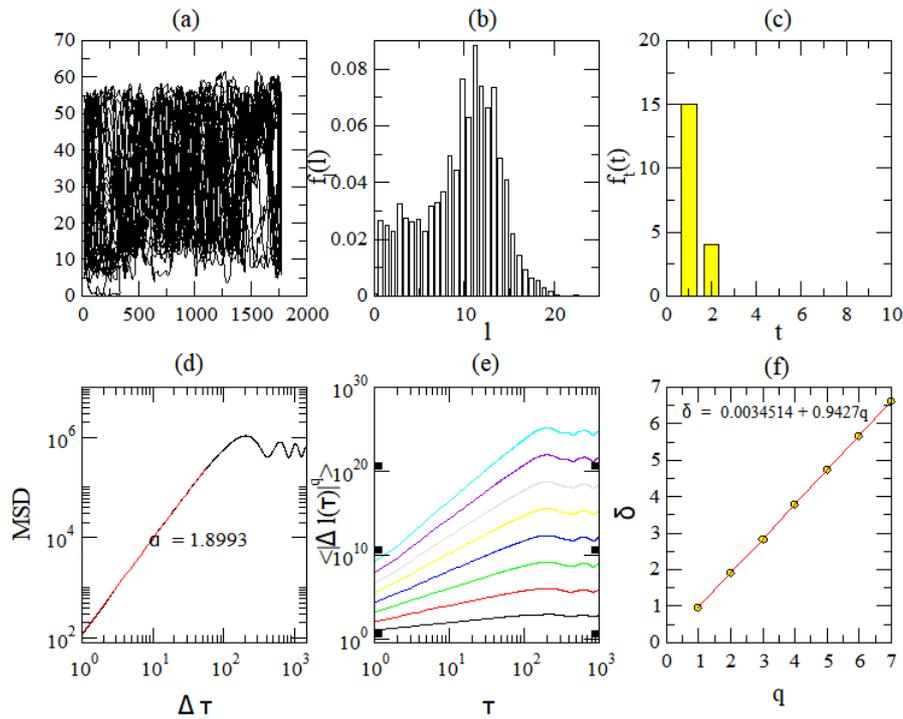
**Figura 52:** Experimento 506d, Em (a) trajetória túnel de espessura 1.5 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



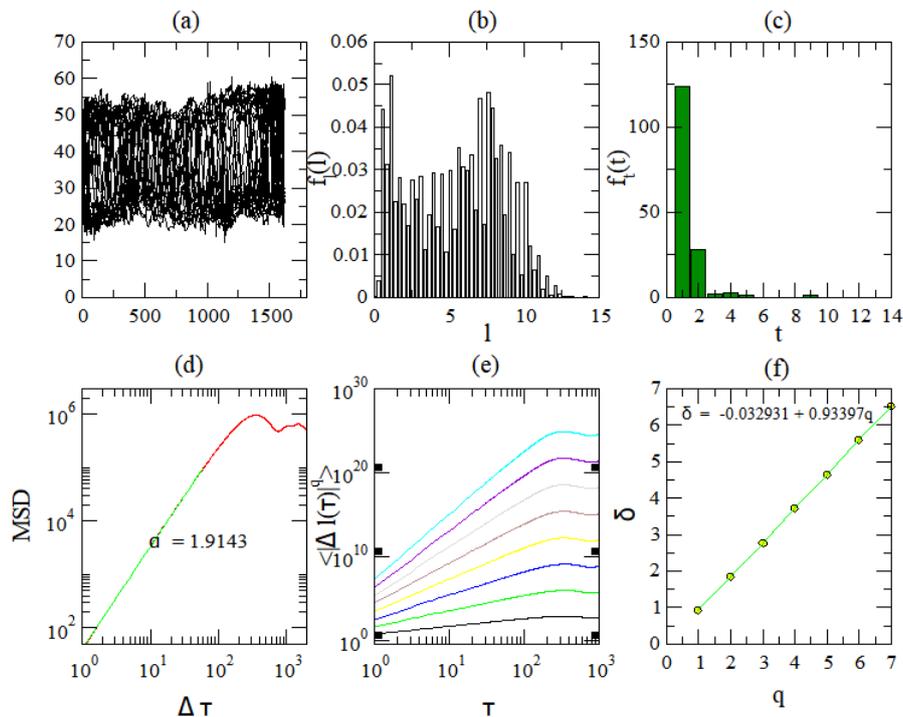
**Figura 53:** Experimento 504, Em (a) trajetória túnel de espessura 1.5 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



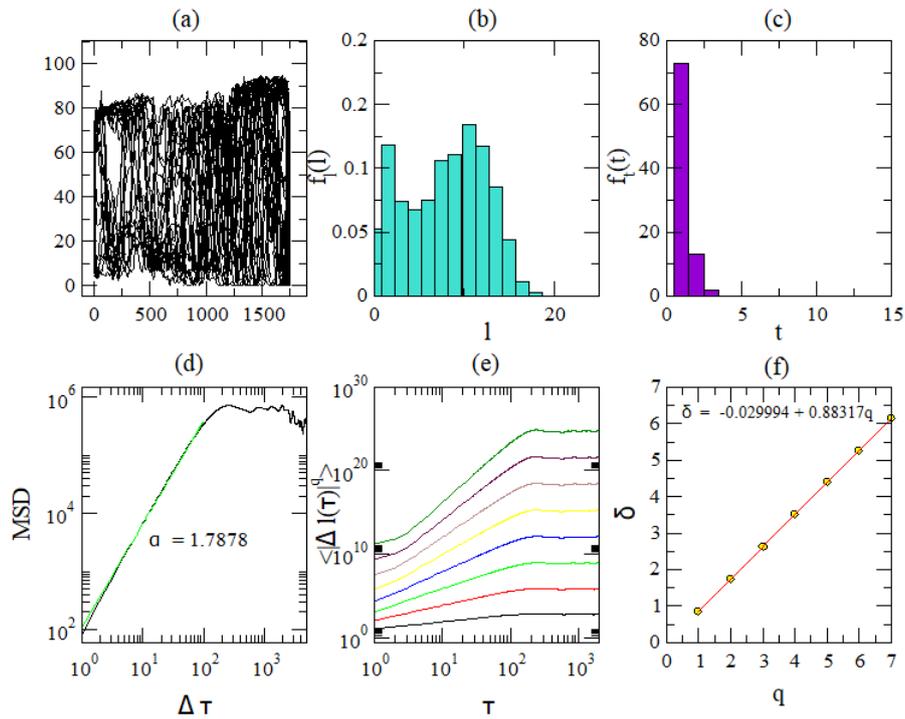
**Figura 54:** Experimento 506f, Em (a) trajetória túnel de espessura 1.5 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



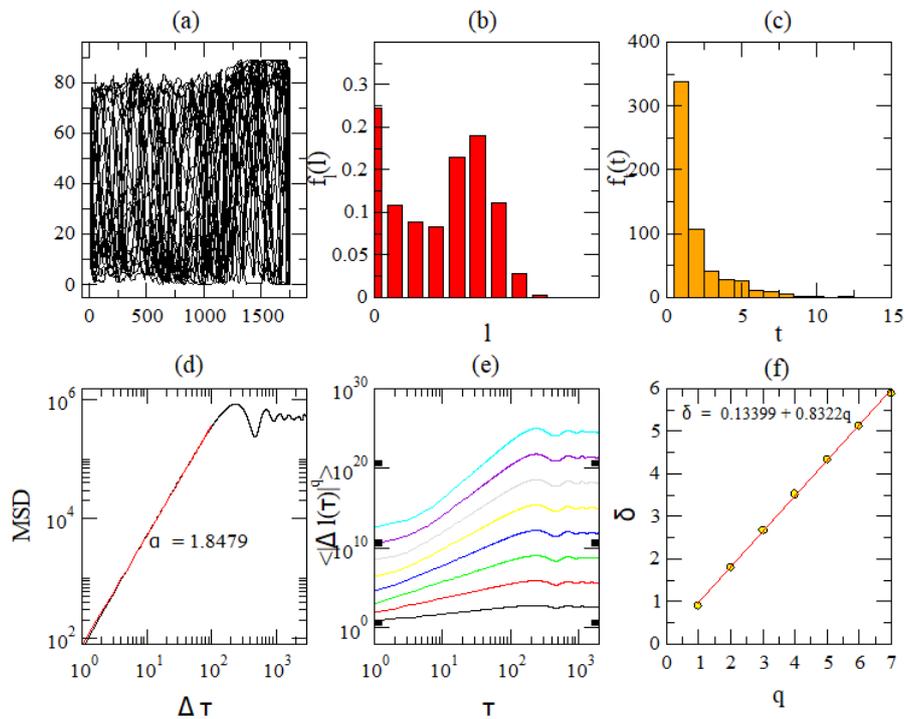
**Figura 55:** Experimento 506e, Em (a) trajetória túnel de espessura 1.5 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



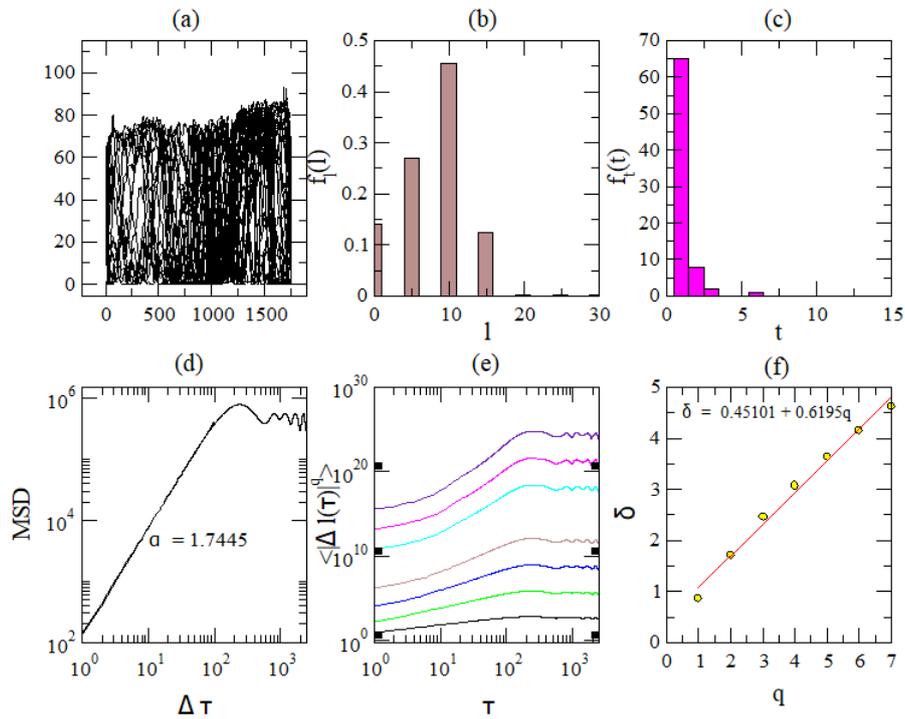
**Figura 56:** Experimento GM3, Em (a) trajetória túnel de espessura 1.5 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



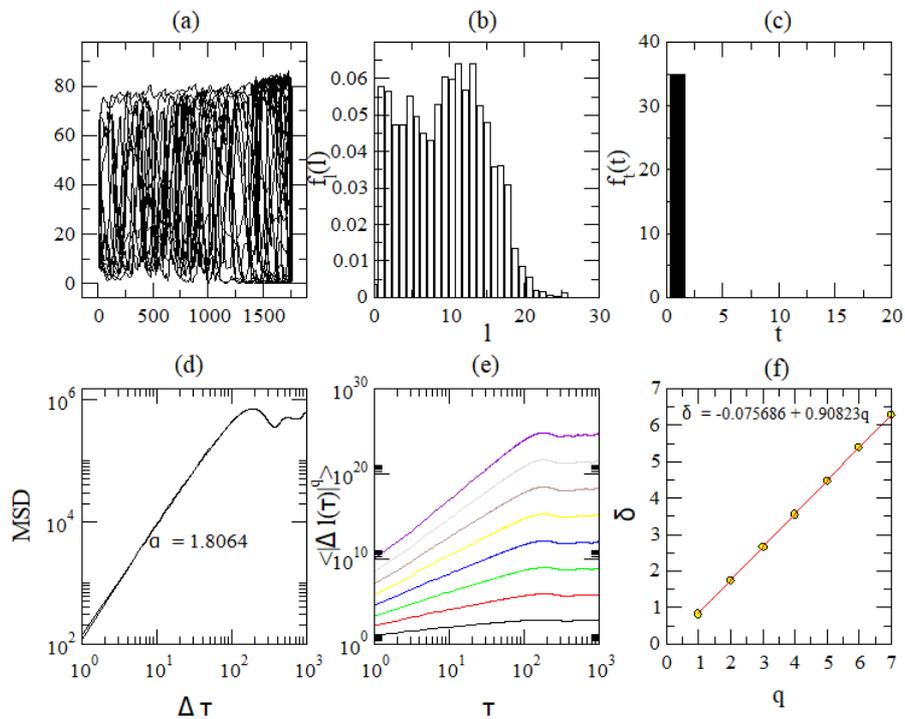
**Figura 57:** Experimento 506a, Em (a) trajetória túnel de espessura 2 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



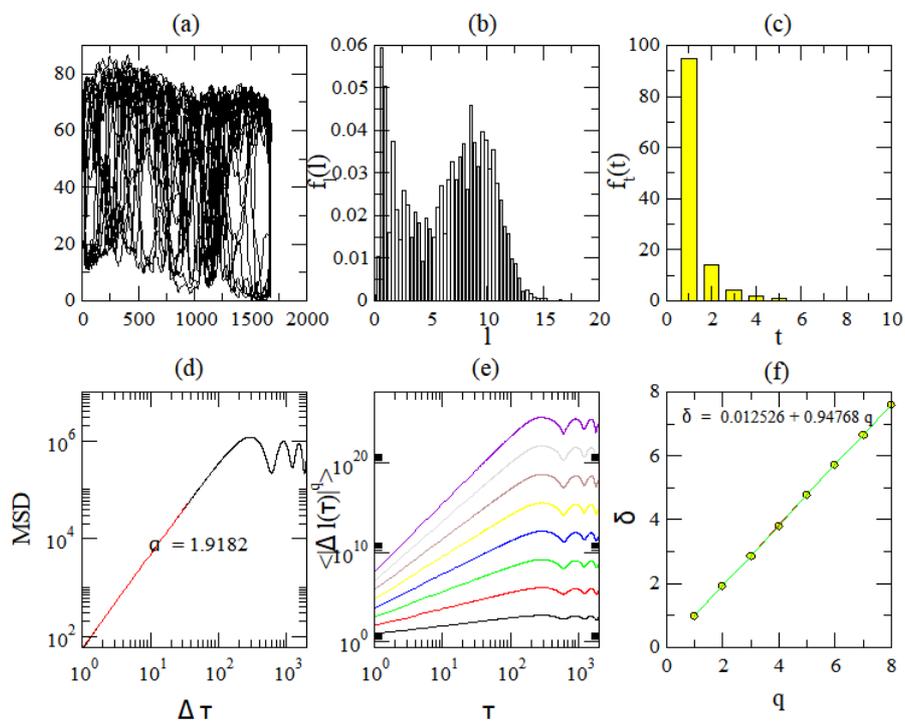
**Figura 58:** Experimento 506b, Em (a) trajetória túnel de espessura 2 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



**Figura 59:** Experimento 506c, Em (a) trajetória túnel de espessura 2 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



**Figura 60:** Experimento 511d, Em (a) trajetória túnel de espessura 2 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .



**Figura 61:** Experimento GM, Em (a) trajetória túnel de espessura 2 cm, histograma de passos em (b), distribuição de tempo de espera em (c), MSD na figura (d), funções de estrutura em (e) e em (f) a relação entre os expoentes de cada uma das funções de estrutura de ordem  $q$ .

## 7 CONCLUSÕES

Apresentamos uma caminhada de um cupim operário do gênero *Cornitermes* spp., cujo movimento ocorre dentro de diferentes formas geométricas sem a presença de alimento ou água. Os dados apresentados neste trabalho correspondem a uma realização experimental com duração aproximada 30 minutos. Nosso interesse era saber se as características observadas neste estudo eram uma propriedade implícita do organismo ou surgiam em resposta ao ambiente, sendo demonstrado que exibirem superdifusão e vôos de Lévy mesmo na ausência de estímulos ou pistas externas, sendo também invariante o comportamento difusivo a forma geométrica ao qual o cupim foi rastreado, tendo um  $\alpha > 1.5$  e  $\mu > 2$  em todas as experimentações, como podemos observar com meio do MSD e das funções de estruturas.

## REFERÊNCIAS

- [1] A. C. P. e Hélida Ferreira da Cunha, “Interações entre cupins (isoptera) e formigas (hymenoptera) co-habitantes em cupinzeiros epÍgeos,” *Revista de Biotecnologia & Ciência*, vol. 1, no. 1, pp. 50–60.
- [2] S. A. O. Fuentes, “Complejidad y dinámica en caminatas de insectos,” Master’s thesis, Universidad Nacional Autónoma de México., México., sep 2008. <https://repositorio.unam.mx/contenidos/71908>.
- [3] P. e. G. J. e. W. C. e. B. P. Darlington, JPEC e Zimmerman, “Produção de gases metabólicos por ninhos do cupim *macrotermes jeanneli* no quênia,” *Journal of Tropical Ecology*, vol. 13.
- [4] A. Perna and G. Theraulaz, “When social behaviour is moulded in clay: on growth and form of social insect nests,” *Journal of Experimental Biology*, vol. 220, no. 1, pp. 83–91, 2017.
- [5] A. Heyde, L. Guo, C. Jost, G. Theraulaz, and L. Mahadevan, “Self-organized biotectonics of termite nests,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 118, no. 5, 2021.
- [6] F. Bartumeus, “Lévy processes in animal movement: an evolutionary hypothesis,” *Fractals*, vol. 15, no. 02, pp. 151–162, 2007.
- [7] R. Metzler and J. Klafter, “The random walk’s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach,” *Physics reports*, vol. 339, no. 1, pp. 1–77, 2000.
- [8] G. M. Viswanathan, M. G. Da Luz, E. P. Raposo, and H. E. Stanley, *The physics of foraging: an introduction to random searches and biological encounters*. Cambridge University Press, 2011.
- [9] A. B. Serrano, “Caracterização da dinâmica de difusão e caminhadas aleatórias em redes complexas e multicamadas com conexões de longa distância,”
- [10] M. Santos, G. Viswanathan, E. Raposo, and M. Da Luz, “Optimization of random searches on defective lattice networks,” *Physical Review E*, vol. 77, no. 4, p. 041101, 2008.
- [11] “Modelos computacionais para processos de forrageamento e facilitação social em cupins,” Master’s thesis.
- [12] K. E. Green, “Stop and go foraging signals in eusocial insects,” 2001.
- [13] P. Turchin, *Quantitative Analysis of Movement: Measuring and Modeling Population Redistribution in Animals and Plants*. Beresta Books, 2015.

- [14] G. d. G. Bagnato, *Análise estrutural de redes complexas modulares por meio de caminhadas auto-excludentes*. doutorado, Instituto de Física de São Carlos - USP, São Carlos, apr 2018. 10.11606/T.76.2018.tde-21062018-152327.
- [15] F. Spitzer, *Principles of random walk*, vol. 34. Springer Science & Business Media, 2001.
- [16] P. E. N. Supérieure, *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, vol. 1. Soc. Math. de France, 1864.
- [17] K. Pearson, “The problem of the random walk,” *Nature*, vol. 72, no. 1865, pp. 294–294, 1905.
- [18] A. Einstein, *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. Courier Corporation, 1956.
- [19] L. A. OLIVEIRA, ““variações nos perfis de hidrocarbonetos cuticulares associadas ao polietismo etário em polybia paulista (hymenoptera: Vespidae)”,” mestrado, UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, RIBEIRÃO PRETO - SP, 2013.
- [20] O. Miramontes and O. DeSouza, “The nonlinear dynamics of survival and social facilitation in termites,” *Journal of Theoretical Biology*, vol. 181, no. 4, pp. 373–380, 1996.
- [21] L. A. OLIVEIRA, ““variações nos perfis de hidrocarbonetos cuticulares associadas ao polietismo etário em polybia paulista (hymenoptera: Vespidae)”,” mestrado, UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, RIBEIRÃO PRETO - SP, 2013.
- [22] P. Eggleton, “An introduction to termites: biology, taxonomy and functional morphology,” in *Biology of termites: a modern synthesis*, pp. 1–26, Springer, 2010.
- [23] J. J. Boomsma, “Lifetime monogamy and the evolution of eusociality,” *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, vol. 364, no. 1533, pp. 3191–3207, 2009.
- [24] P. Jolivet, “Holldobler, b., and wilson, eo 2008. the superorganisms. the beauty, elegance and strangeness of insect societies,” *Florida Entomologist*, vol. 92, no. 3, pp. 527–527, 2009.
- [25] D. O’toole, P. Robinson, and M. Myerscough, “Self-organized criticality in termite architecture: a role for crowding in ensuring ordered nest expansion,” *Journal of theoretical biology*, vol. 198, no. 3, pp. 305–327, 1999.
- [26] A. Khuong, J. Gautrais, A. Perna, C. Sbaï, M. Combe, P. Kuntz, C. Jost, and G. Theraulaz, “Stigmatic construction and topochemical information shape ant nest architecture,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 113, no. 5, pp. 1303–1308, 2016.

- [27] G. P-P, “Reconstruction of the nest and coordination between individuals in terms. *bellicositermes natalensis* and *cubitermes* sp. the theory of stigmergy: Test interpretation of termite constructions,” *Insectes Sociaux*, vol. 1, no. 6, p. 41–80, 1959.
- [28] “A organização do trabalho em colônias de insetos sociais,” vol. 380.
- [29] S. P. Rockwood, Larry L e Hubbell, “Seleção de plantas hospedeiras, diversidade de dieta e forrageamento ideal em uma formiga cortadeira tropical,” *Oecologia*, vol. 74.
- [30] F. Bollazzi, Martin e Rocés, “Necessidades de informação no início do forrageamento: formigas cortadeiras trocam o tamanho da carga por um retorno mais rápido ao ninho,” *PloS um*, vol. 6.
- [31] “Jardinagem de formigas as attines,”
- [32] M. Saar, T. Gilad, T. Kilon-Kallner, A. Rosenfeld, A. Subach, and I. Scharf, “The interplay between maze complexity, colony size, learning and memory in ants while solving a maze: A test at the colony level,” *PloS one*, vol. 12, no. 8, p. e0183753, 2017.
- [33] L. D. Stringer, N. J. Sullivan, R. White, A. Jiménez-Pérez, J. Furlong, J. M. Kean, J. R. Beggs, and D. M. Suckling, “Mazes to study the effects of spatial complexity, predation and population density on mate finding,” *Insects*, vol. 11, no. 4, p. 256, 2020.
- [34] J. M. d. Silva and J. Lima, “Quatro abordagens para o movimento browniano,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 29, pp. 25–35, 2007.
- [35] M. J. e. B. S. Codling, Edward A e Plank, “Modelos de caminhada aleatória em biologia,” *Journal of the Royal Society interface*, vol. 5.
- [36] G. H. Pyke, “Understanding movements of organisms: it’s time to abandon the lévy foraging hypothesis,” *Methods in Ecology and Evolution*, vol. 6, no. 1, pp. 1–16, 2015.
- [37] M. B. Barbosa, “Análise de caminhadas de lévy em trajetórias curvas 2d,” 2016.
- [38] A. B. Favaretto, “Estimativa do expoente de hurst de séries temporais de chuvas do estado de são paulo usando as transformadas de fourier, wavelets e análise r/s,” 2004.
- [39] A. F. Ferreira and L. M. BORGES, “As pontes de königsberg,” 2015.
- [40] M. Pasta, *Models to generate complex networks and benchmark graphs*. PhD thesis, 12 2018.
- [41] M. E. J. Newman, *Networks: An Introduction*. Oxford University Press, USA, mar 2020.
- [42] P. Erdos, A. Rényi, *et al.*, “On the evolution of random graphs,” *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci*, vol. 5, no. 1, pp. 17–60, 1960.

- [43] A.-L. Albert, Réka e Barabási, “Mecânica estatística de redes complexas,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 74.
- [44] G. Viswanathan, V. Afanasyev, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. Da Luz, E. Raposo, and H. E. Stanley, “Lévy flights in random searches,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 282, no. 1-2, pp. 1–12, 2000.
- [45] M. Santos, G. Viswanathan, E. Raposo, and M. da Luz, “Optimization of random searches on regular lattices,” *Physical Review E*, vol. 72, no. 4, p. 046143, 2005.
- [46] T. A. G. d. S. B. Lima, “Estudos de eficiência em buscas aleatórias unidimensionais,” Master’s thesis, Universidade Federal de Pernambuco, 2010.
- [47] O. Peres Filho, J. C. de Souza, M. D. de Souza, and A. Dorval, “Distribuição espacial de cupinzeiros de *cornitermes snyderi* (isoptera: Termitidae) e sua associação com teca,” *Pesquisa florestal brasileira*, vol. 32, no. 70, pp. 175–175, 2012.
- [48] L. R. Paiva, A. Marins, P. F. Cristaldo, D. M. Ribeiro, S. G. Alves, A. M. Reynolds, O. DeSouza, and O. Miramontes, “Scale-free movement patterns in termites emerge from social interactions and preferential attachments,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 118, no. 20, p. e2004369118, 2021.
- [49] O. Miramontes, O. DeSouza, L. R. Paiva, A. Marins, and S. Orozco, “Lévy flights and self-similar exploratory behaviour of termite workers: beyond model fitting,” *PloS one*, vol. 9, no. 10, p. e111183, 2014.
- [50] L. A. de Barros, “Busca por processos subdifusivos em animais confinados,” Master’s thesis, UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI, dec 2021.
- [51] A. M. Reynolds, “Mussels realize weierstrassian lévy walks as composite correlated random walks,” *Scientific reports*, vol. 4, no. 1, pp. 1–5, 2014.
- [52] J. Castiblanco, P. F. Cristaldo, L. R. Paiva, and O. DeSouza, “Social context modulates scale-free movements in a social insect,” *Journal of Theoretical Biology*, vol. 542, p. 111106, 2022.
- [53] J. R. Ferreira Filho *et al.*, “Geometria fractal: da natureza para a sala de aula,” 2015.
- [54] D. A. Ruiz Rojas, “Deslocamento dos operários de cupins em função do contexto social,” 2016.
- [55] V. J. Wearmouth, M. J. McHugh, N. E. Humphries, A. Naegelen, M. Z. Ahmed, E. J. Southall, A. M. Reynolds, and D. W. Sims, “Scaling laws of ambush predator ‘waiting’ behaviour are tuned to a common ecology,” *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, vol. 281, no. 1782, p. 20132997, 2014.