Estabelecendo uma conexão entre equações fuchsianas com três singularidades, triângulos hiperbólicos e teoria da informação

Mariana Gabriela Gusmão; Anderson José de Oliveira

Universidade Federal de Alfenas

11 de agosto de 2022

Revisão de Literatura

- Teoria da informação introduzida por Shannon em 1948.
  - Transmitir e armazenar dados de maneira confiável, de modo que ao recuperar uma informação, seja possível detectar e corrigir erros.

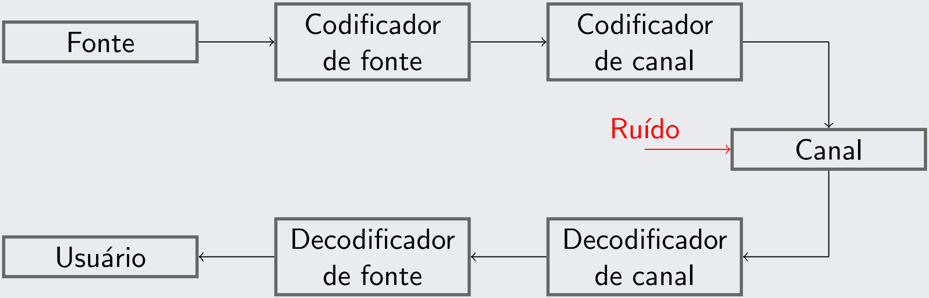

Figura 1: Diagrama - sistema de comunicação.

Revisão de Literatura

- Códigos Geometricamente Uniformes (FORNEY, 1991).

Definição

Uma constelação de sinais S é um subconjunto finito de pontos em um espaço métrico (M, d). Essa constelação é um código geometricamente uniforme se, dados s_1 e s_2 em S, existe uma isometria u_{s_1,s_2} que transforma s_1 em s_2 mantendo S invariante, ou seja,

$$u_{s_1,s_2}(s_1) = s_2, \qquad u_{s_1,s_2}(S) = S.$$

Revisão de Literatura

- Códigos Geometricamente Uniformes (FORNEY, 1991).

Definição

Uma constelação de sinais S é um subconjunto finito de pontos em um espaço métrico (M, d). Essa constelação é um código geometricamente uniforme se, dados s_1 e s_2 em S, existe uma isometria u_{s_1,s_2} que transforma s_1 em s_2 mantendo S invariante, ou seja,

$$u_{s_1,s_2}(s_1) = s_2, \qquad u_{s_1,s_2}(S) = S.$$

- A região de Voronoi de s_0 em S consiste dos pontos que estão mais próximos de s_0 que de qualquer outro ponto de S.
- Processo de decodificação em um código geometricamente uniforme.

Revisão de Literatura

- Martínez, Beivide e Gabidulin (2007) $\longrightarrow$ Códigos perfeitos.
- Quilles e Palazzo Jr. (2010) $\longrightarrow$ Códigos quase perfeitos.

Geometria Hiperbólica

- Negação do quinto postulado de Euclides.
- Consistência da geometria hiperbólica $\longrightarrow$ Criação de modelos euclidianos para a geometria hiperbólica.

Revisão de Literatura

Modelos euclidianos do plano hiperbólico

- **Modelo do disco de Poincaré:** O disco $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ é chamado disco de Poincaré. O círculo $\delta\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ é chamado círculo no infinito ou fronteira de $\mathbb{D}$.
- **Modelo do Semiplano Superior:** Seja $\mathbb{E}$ o plano euclidiano e fixada uma reta que define dois semiplanos. O plano superior S_p, é denominado Semiplano Superior ou Modelo do Semiplano de Poincaré.

Revisão de Literatura

Equações diferenciais fuchsianas

- Dizemos que a equação:

$$y^{(n)}(z) + p_1(z)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(z)y'(z) + p_n(z)y(z) = 0$$

  é uma equação de Fuchs ou uma equação do tipo fuchsiana se todo ponto singular no plano complexo estendido for regular.
- Os pontos singulares são aqueles em que $p(z)$ ou $q(z)$ deixam de ser analíticas, ou seja, são os pontos que zeram o denominador da fração e um ponto é singular regular se tanto $(z - z_0)p(z)$ quanto $(z - z_0)^2q(z)$ forem analíticas em z_0, onde z_0 é uma singularidade.

Revisão de Literatura

- Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) fuchsiana de segunda ordem com n pontos singulares é da forma:

$$y''(z) + p(z)y'(z) + q(z)y(z) = 0,$$

com:

$$p(z) = \frac{A_1}{z-\epsilon_1} + \cdots + \frac{A_n}{z-\epsilon_n} + K_1,$$

$$q(z) = \frac{B_1}{(z-\epsilon_1)^2} + \frac{C_1}{z-\epsilon_1} + \cdots + \frac{B_n}{(z-\epsilon_n)^2} + \frac{C_n}{z-\epsilon_n} + K_2,$$

onde:

$$A_1 + \cdots + A_n = 2$$

$$C_1 + \cdots + C_n = 0$$

$$(B_1 + \cdots + B_n) + (\epsilon_1 C_1 + \cdots + \epsilon_n C_n) = 0$$

$$(2\epsilon_1 B_1 + \cdots + 2\epsilon_n B_n) + (\epsilon_1^2 C_1 + \cdots + \epsilon_n^2 C_n) = 0$$

Revisão de Literatura

Classificação de uma equação diferencial fuchsiana.

Classificação
São classificadas entre as equações hipergeométricas, as de Tchebychev e as de Legendre, quando restritas a três pontos singulares regulares, sendo um deles localizado no infinito.

Revisão de Literatura

- Oliveira e Palazzo Jr (2018) apresentam singularidades de equações diferenciais fuchsianas como elementos de uma sequência de Farey.
- Singularidades $\longrightarrow$ Geometria hiperbólica.

Objetivos

- Geral

O objetivo geral deste trabalho é estabelecer as conexões existentes entre elementos de geometria hiperbólica, equações diferenciais fuchsianas e estruturas algébricas para posteriormente aplicá-las em canais de comunicação.

Metodologia

- Pontos singulares regulares de uma equação diferencial fuchsiana que também gerem uma constelação de sinais no plano complexo.
- Analisar a existência de um código perfeito e/ou quase perfeito onde já será possível analisar a capacidade de correção de erros.
- Considerar um triângulo hiperbólico e assim analisar o gênero da superfície associada à equação diferencial fuchsiana e à constelação de sinais.
- Aplicar essas conexões a um sistema de comunicação padrão para que possamos analisar a influência de erros no processo de transmissão da informação.

Resultados

- Apresentamos inicialmente dois pontos do plano complexo que serão vistos como singularidades de uma equação diferencial fuchsiana, junto com o ponto no infinito, e como geradores de uma constelação de sinais.
- Pontos: $3 + 4i$, $-3 + 4i$.

Assim, temos:

Equação diferencial fuchsiana

$$y'' + \left[\frac{A_1}{(z-(3+4i))} + \frac{A_2}{(z-(-3+4i))} + K_1\right] y' + \left[\frac{B_1}{(z-(3+4i))^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{B_2}{(z-(-3+4i))^2} + \frac{C_1}{(z-(3+4i))} + \frac{C_2}{(z-(-3+4i))} + K_2\right] y = 0$$

Sejam,

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2 \\ C_1 + C_2 = 0 \\ (B_1 + B_2) + ((3+4i)C_1 + (-3+4i)C_2) = 0 \\ (2(3+4i)B_1 + 2(-3+4i)B_2) + ((3+4i)^2 C_1 + (-3+4i)^2 C_2) = 0 \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} A_2 = 2 \\ A_1 = B_1 = B_2 = C_1 = C_2 = 0. \end{cases}$$

Equações diferenciais fuchsianas

Desta forma,

$$y'' + \left(\frac{2z - 6 - 8i}{z^2 - 8iz - 25} + K_1 \right) y' + K_2 y = 0.$$

Assim, a partir das singularidades $3 + 4i$, $-3 + 4i$ e ∞ e usando as condições necessárias para que a equação seja fuchsiana, temos:

$$(z^2 - 8iz - 25)y'' + [2z - 6 - 8i + K_1(z^2 - 8iz - 25)]y' + [K_2(z^2 - 8iz - 25)]y = 0,$$

onde $K_1, K_2 \in \mathbb{C}$.

- Agora, vamos tomar os pontos $3+4i$ e $-3+4i$, anteriormente vistos como singularidade, como geradores de uma constelação de sinais.

Dado o corpo de números $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, o anel dos inteiros de $\mathbb{K}$ é $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, chamado *anel dos inteiros de Gauss*. A norma de $\mathbb{Z}[i]$ é dada pela aplicação $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}_+$, definida como $N(\alpha) = \alpha \cdot \overline{\alpha}$, onde $\alpha = a + bi$ e $\overline{\alpha}$ é o conjugado de $\alpha, a - bi$. O anel quociente $\frac{\mathbb{Z}[i]}{[\alpha]}$, denotado por $\mathbb{Z}[i]_\alpha$, possui $N(\alpha) = a^2 + b^2$ elementos.

Códigos geometricamente uniformes

Tomando $\alpha = 3 + 4i$, os elementos do anel quociente são:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[i]_{3+4i} =& \{0, 1, 2, 3, -1, -2, -3, i, 2i, 3i, -i, -2i, -3i, 1 + i, 1 + 2i, 1 - i, 1 - \\ & -1 + i, -1 + 2i, 2 + i, -2 + i, 2 - i, -2 - i\},\end{aligned}$$

contendo $N(\alpha) = 25$ elementos.
Para $\alpha = -3 + 4i$, obtemos os mesmos elementos do anel quociente, ou seja, $\mathbb{Z}[i]_{3+4i} = \mathbb{Z}[i]_{-3+4i}$.

Código perfeito

Teorema (C. Martinez, R. Beivide, E. Gabidulin., 2007)

Dado $\alpha \neq 0 \in \mathbb{Z}[i]$ e t um inteiro positivo. Temos que:

1. *Se $\beta = t + (t+1)i$ divide α, então o ideal $S = \langle \beta \rangle \subseteq \mathbb{Z}[i]_\alpha$ forma um código perfeito que corrige todos os padrões com até t erros;*
2. *Se $\overline{\beta} = t - (t+1)i$ divide α, então o ideal $S = \langle \overline{\beta} \rangle \subseteq \mathbb{Z}[i]_\alpha$ forma um código perfeito que corrige todos os padrões com até t erros.*

Código perfeito

- Dado $\alpha = 3 + 4i = (1 - 2i)(-1 + 2i)$;
- Tomamos $\beta = 1 - 2i$;
- $[\bar{\beta}] = [1 - 2i]$ é um conjunto perfeito 1-dominante em G_{3+4i}, com $N(\alpha)/N(\beta) = 5$;
- $S = [\bar{\beta}] = \{0, 1 - 2i, -2 - i, 2 + i, -1 + 2i\}$;
- corrige todos os padrões com 1 erro e nenhum padrão com 2 ou mais erros.
- O código é identificado no grafo pelos pontos que estão duplamente circulados, formando os baricentros dos 5 polígonos fundamentais, com 5 elementos, que recobrem a constelação de sinais, contendo 25 elementos de $\mathbb{Z}_{3+4i}$.

Código perfeito

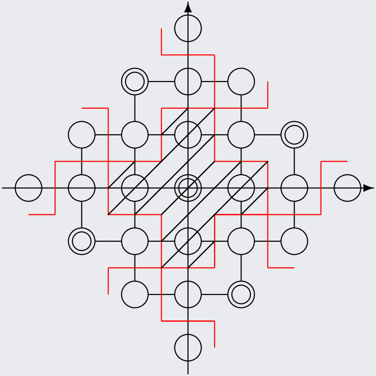

Figura 2: Código Perfeito 1-dominante em G_{3+4i}.

Autor.

Código perfeito

- Dado $\alpha = -3 + 4i = (1 + 2i)(1 + 2i)$;
- Tomamos $\beta = 1 + 2i$;
- $[\bar{\beta}] = [1 + 2i]$ é um conjunto perfeito 1-dominante em G_{-3+4i}, com $N(\alpha)/N(\beta) = 5$;
- $S = [\bar{\beta}] = \{0, 1 + 2i, -2 + i, 2 - i, -1 - 2i\}$;
- corrige todos os padrões com 1 erro e nenhum padrão com 2 ou mais erros.
- O código é identificado no grafo pelos pontos que estão duplamente circulados, formando os baricentros dos 5 polígonos fundamentais, com 5 elementos, que recobrem a constelação de sinais, contendo 25 elementos de $\mathbb{Z}_{-3+4i}$.

Código perfeito

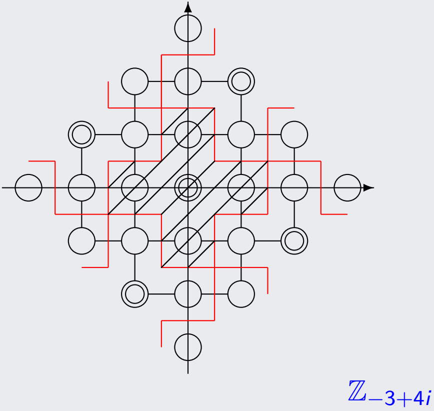

Figura 3: Código Perfeito 1-dominante em G_{-3+4i}.

Autor.

Código perfeito

Veja que ao tomarmos pontos simétricos em relação ao eixo imaginário para a geração da constelação de sinais, obtemos os pontos conjugados em cada constelação, assim como o código quase perfeito existente sobre a constelação.

Geometria hiperbólica

- Vamos considerar $3+4i$, $-3+4i$ e ∞ como vértices de um triângulo hiperbólico.
- E apresentar as transformações de Mobius (transformações de emparelhamentos), que podem ser aplicadas a esse polígono.

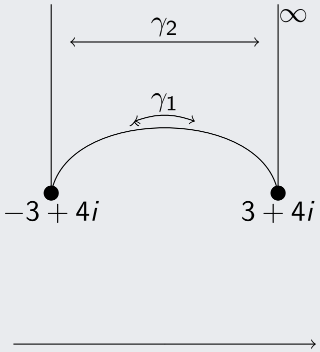

Figura 4: Singularidades $\{-3+4i, 3+4i \text{ e } \infty\}$.

Autor.

Além da representação das singularidades no modelo do semiplano superior, pode-se representar as mesmas no modelo do disco de Poincaré, por meio da Transformação de Cayley $\bar{z} = \frac{z-i}{z+i}$, uma bijeção do semiplano superior no disco de Poincaré, Figura 5.

- para $z = 3 + 4i \Rightarrow \bar{z} = \frac{3+4i-i}{3+4i+i} = \frac{3+3i}{3+5i} = \frac{1}{17}(12 - 3i)$;
- para $z = -3 + 4i \Rightarrow \bar{z} = \frac{-3+4i-i}{-3+4i+i} = \frac{-3+3i}{-3+5i} = \frac{1}{17}(12 + 3i)$;
- para $z = \infty \Rightarrow \bar{z} = \lim_{z\to\infty} \frac{z-i}{z+i} = 1$.

Geometria hiperbólica

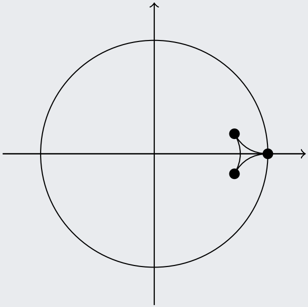

Figura 5: Singularidades no disco de Poincaré.

Autor.

Podemos identificar a superfície associada aos emparelhamentos por meio da característica de Euler, dada por:

$$\mathcal{X} = 2 - 2g = V - E + F,$$

onde $\mathcal{X}$ é a característica de Euler, g é o gênero da superfície, V é o número de vértices, E é o número de arestas e F é o número de faces. Da Figura 5, temos:

$$\mathcal{X}(A) = V - E + F = 3 - \frac{4}{2} + 1 = 2,$$

$$\mathcal{X}(A) = 2 - 2g = 2 \Rightarrow g = 0.$$

Portanto, a superfície associada é a esfera.

Canal binário simétrico

Assim como a esfera esta associada ao triangulo hiperbólico, esta associada também a o canal binário simétrico $C_{2,2}$, um canal com duas entradas e duas saídas.
Podemos representar o canal $C_{2,2}$ com o grafo bipartido completo $K_{2,2}$.
Considere as singularidades $3+4i$, $-3+4i$ como as entradas e saídas do canal $C_{2,2}$, sendo representadas respectivamente pelas entradas binárias 0 e 1.

Canal binário simétrico

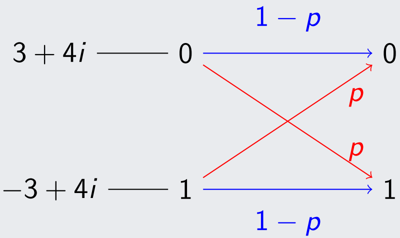

Figura 6: Grafo associado as singularidades $3 + 4i$ e $-3 + 4i$.

Autor.

Canal binário simétrico

Ao considerar as singularidades como vértices de um triângulo hiperbólico, estabelecemos uma conexão com o canal binário simétrico $C_{2,2}$, cuja entradas e saídas representam as singularidade $3+4i$ e $-3+4i$. Portanto, temos que a probabilidade de erro, p, é a mesma independente da singularidade transmitida.

Referências

FORNEY, G. D. Geometrically Uniform Codes. **IEEE Trans. On Inform. Theory**, v.37 N.5, p. 1241-1260, 1991.

KRISTENSSON, G. **Second Order Differential Equations - Special Functions and their classification**. Springer, New York, 2010.

MARTÍNEZ, C., BEIVIDE, R., GABIDULIN, E. Perfect codes from metrics induced by circulant graphs, **IEEE Trans. On Inform. Theory**, v. 53 n. 9, p. 3042-3052, 2007.

OLIVEIRA, A. J.; PALAZZO JR., R. **Uniformização de curvas algébricas associadas a sequências de Farey através de equações diferenciais fuchsianas na proposta de novos sistemas de comunicação**. Tese de Doutorado, FEEC-Unicamp, 2017.

Referências

OLIVEIRA, A. J.; PALAZZO JR., R. Uniformização de Curvas Algébricas Planares via EDOs Fuchsianas no Estudo de Sistemas de Comunicação. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics**, v. 6, n. 1, 2018.

WALKDEN, C. **Hyperbolic Geometry**. Manchester University, 2012.