

# Minicurso 2

## Códigos Quânticos: do Código de Shor aos Códigos Topológicos

### Códigos Quânticos Topológicos

Clarice Dias de Albuquerque

VI Workshop Escola de Computação e Informação Quântica - WECIQ

12/08/2022

Introdução

Códigos Tóricos

Códigos  $g$ -Tóricos com  $g \geq 2$

Códigos Coloridos

# Códigos Quânticos

**Código Quântico Corretor de Erros  $[[n, k, d]]$ :**  $k$  qubits são codificados em  $n$  qubits. Um código com distância mínima  $d$  pode detectar até  $d - 1$  erros e corrigir até  $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$  erros.

# Códigos Quânticos

**Código Quântico Corretor de Erros  $[[n, k, d]]$ :**  $k$  qubits são codificados em  $n$  qubits. Um código com distância mínima  $d$  pode detectar até  $d - 1$  erros e corrigir até  $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$  erros.

**Código de Shor  $[[9, 1, 3]]$ :** pode corrigir um erro arbitrário ocorrido em um qubit - *Código de Repetição*.

# Códigos Quânticos

**Código Quântico Corretor de Erros  $[[n, k, d]]$ :**  $k$  qubits são codificados em  $n$  qubits. Um código com distância mínima  $d$  pode detectar até  $d - 1$  erros e corrigir até  $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$  erros.

**Código de Shor  $[[9, 1, 3]]$ :** pode corrigir um erro arbitrário ocorrido em um qubit - *Código de Repetição*.

**Código Estabilizador:** é o autoespaço simultâneo com autovalor 1 de todos os elementos de um certo subgrupo abeliano  $S$ .

# Códigos Quânticos

**Código Quântico Corretor de Erros  $[[n, k, d]]$ :**  $k$  qubits são codificados em  $n$  qubits. Um código com distância mínima  $d$  pode detectar até  $d - 1$  erros e corrigir até  $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$  erros.

**Código de Shor  $[[9, 1, 3]]$ :** pode corrigir um erro arbitrário ocorrido em um qubit - *Código de Repetição*.

**Código Estabilizador:** é o autoespaço simultâneo com autovalor 1 de todos os elementos de um certo subgrupo abeliano  $S$ .

**Códigos Quânticos Topológicos:** é uma classe dentro dos códigos estabilizadores definida em tesselações de variedades bidimensionais.

## Códigos Quânticos MDS

O **Limitante Quântico de Singleton** para um código quântico  $[[n, k, d]]$  é:

$$n - k \geq 2.(d - 1).$$

um código quântico de **Máxima Distância Separável (MDS)** deve satisfazer tal limitante com a igualdade.

## Códigos Quânticos MDS

O **Limitante Quântico de Singleton** para um código quântico  $[[n, k, d]]$  é:

$$n - k \geq 2.(d - 1).$$

um código quântico de **Máxima Distância Separável (MDS)** deve satisfazer tal limitante com a igualdade.

Garante-se a máxima distância possível entre suas palavras-código, conseqüentemente, maior capacidade de detecção e correção de erros.



## Códigos Quânticos MDS

O **Limitante Quântico de Singleton** para um código quântico  $[[n, k, d]]$  é:

$$n - k \geq 2.(d - 1).$$

um código quântico de **Máxima Distância Separável (MDS)** deve satisfazer tal limitante com a igualdade.

Garante-se a máxima distância possível entre suas palavras-código, conseqüentemente, maior capacidade de detecção e correção de erros.

**Exemplo:** o código estabilizador  $[[5, 1, 3]]$ .

## Códigos Quânticos MDS

O **Limitante Quântico de Singleton** para um código quântico  $[[n, k, d]]$  é:

$$n - k \geq 2.(d - 1).$$

um código quântico de **Máxima Distância Separável (MDS)** deve satisfazer tal limitante com a igualdade.

Garante-se a máxima distância possível entre suas palavras-código, consequentemente, maior capacidade de detecção e correção de erros.

**Exemplo:** o código estabilizador  $[[5, 1, 3]]$ .

Para a maioria dos valores de  $n$  e  $k$  o limite não é alcançado.

## Códigos Quânticos MDS

O **Limitante Quântico de Singleton** para um código quântico  $[[n, k, d]]$  é:

$$n - k \geq 2.(d - 1).$$

um código quântico de **Máxima Distância Separável (MDS)** deve satisfazer tal limitante com a igualdade.

Garante-se a máxima distância possível entre suas palavras-código, conseqüentemente, maior capacidade de detecção e correção de erros.

**Exemplo:** o código estabilizador  $[[5, 1, 3]]$ .

Para a maioria dos valores de  $n$  e  $k$  o limite não é alcançado.

Conjectura-se que códigos ótimos com  $d = 2$  e comprimento par, devem ser da forma  $[[2N, 2(N - 1), 2]]$ .

# Computação Quântica Topológica

## Ideia original - Alexei Yu Kitaev 1997 (versão final 2003)

- ▶ Construção de códigos estabilizadores em um reticulado quadrado do toro planar - *Toric Code*.
- ▶ Computação quântica topológica.

# Computação Quântica Topológica

## Ideia original - Alexei Yu Kitaev 1997 (versão final 2003)

- ▶ Construção de códigos estabilizadores em um reticulado quadrado do toro planar - *Toric Code*.
- ▶ Computação quântica topológica.

**Computação anyônica:** é realizada por meio de cordas entrançadas que representam o movimento de partículas (Anyons) no espaço tempo.

# Computação Quântica Topológica

## Ideia original - Alexei Yu Kitaev 1997 (versão final 2003)

- ▶ Construção de códigos estabilizadores em um reticulado quadrado do toro planar - *Toric Code*.
- ▶ Computação quântica topológica.

**Computação anyônica:** é realizada por meio de cordas entrançadas que representam o movimento de partículas (Anyons) no espaço tempo.

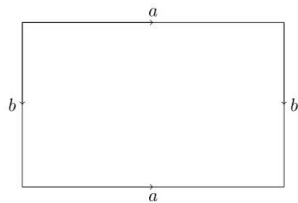
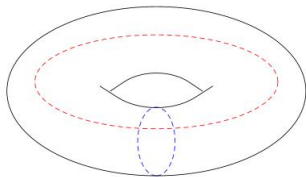
Os estados quânticos dependem de propriedades topológicas de um sistema físico. Assim, deformações contínuas causadas pelo ambiente não seriam capazes de alterar tais propriedades, tornando a computação naturalmente tolerante a falhas.

## Código Tórico de Kitaev

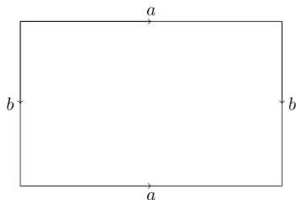
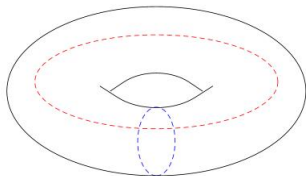
- ▶ São baseados em homologia-cohomologia.
- ▶ Esquemas topológicos de computação quântica tolerantes a falhas
  - ▶ Altos limites de erro
  - ▶ Robustos contra perdas
  - ▶ Grandes companhias estão investindo  
(Sycamore - processador quântico da Google - 53 qubits)
- ▶ Permitem a implementação das portas

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

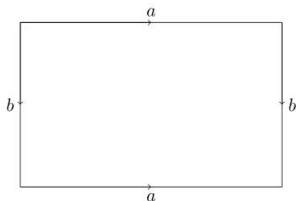
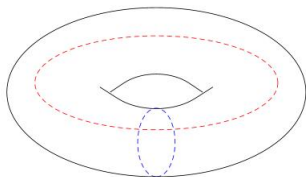
$$CNot = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$





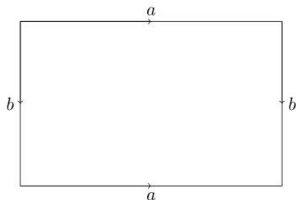
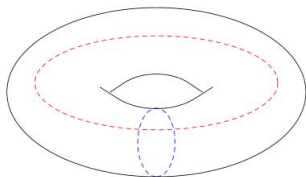


Toro ( $T^2$ ) é uma superfície compacta orientável com gênero  $g = 1$  - superfície de um donut ou homeomorfo a uma esfera com uma alça.



Toro ( $T^2$ ) é uma superfície compacta orientável com gênero  $g = 1$  - superfície de um donut ou homeomorfo a uma esfera com uma alça.

$g$  é um invariante topológico que representa o número de “buracos” ou alças.



Toro ( $T^2$ ) é uma superfície compacta orientável com gênero  $g = 1$  - superfície de um donut ou homeomorfo a uma esfera com uma alça.

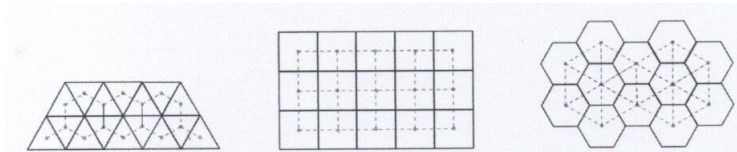
$g$  é um invariante topológico que representa o número de “buracos” ou alças.

$T^2$  pode ser obtido identificando os lados opostos de um paralelogramo, preservando as orientações.

Os códigos tóricos são definidos em reticulados do toro.

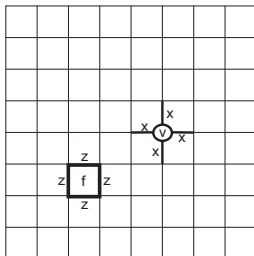
Reticulados Regulares do Toro Planar  $\{p, q\}$ ;  $(p - 2)(q - 2) = 4$ :

- ▶ quadrado  $\{4, 4\}$  (autodual)
- ▶ hexagonal  $\{6, 3\}$  - dual  $\{3, 6\}$



Os qubits são associados às arestas e os operadores estabilizadores às faces e vértices do reticulado.

- ▶ Reticulado  $m \times m$
- ▶  $n = E \Rightarrow n = 2m^2$



## Operadores:

- ▶  $Z$  atuam nas arestas do reticulado primal;
- ▶  $X$  atuam nas arestas do reticulado dual;
- ▶ Operadores Estabilizadores:  $A_v = \bigotimes_{j \in E_v} X^j$      $B_f = \bigotimes_{j \in E_f} Z^j$
- ▶  $\mathcal{C} = \{|\psi\rangle : A_v|\psi\rangle = |\psi\rangle, B_f|\psi\rangle = |\psi\rangle \ \forall v, f\}$ .
- ▶ Os operadores de Pauli codificados tomam a forma de cordas fechadas sobre o toro.

$$\prod_v A_v = 1 \quad \text{and} \quad \prod_f B_f = 1. \quad (1)$$

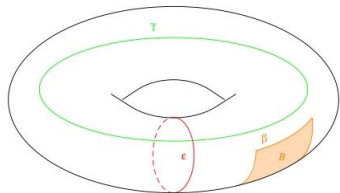
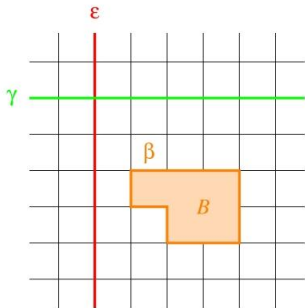
- ▶ A dimensão  $s$  do subespaço estabilizador  $S$  é  $2m^2 - 2$ .
- ▶  $\dim \mathcal{C} = 2^{n-s} = 2^2 = 4$ .
- ▶  $\mathcal{C}$  codifica  $k = 2$  qubits.



- ▶ Reticulado  $m \times m$ .
- ▶  $n = E = 2m^2$  e  $k = 2$ .
- ▶  $d = m$ .
- ▶  $[[2m^2, 2, m]]$
- ▶  $A_v = \bigotimes_{j \in E_v} X^j$      $B_f = \bigotimes_{j \in E_f} Z^j$
- ▶  $\mathcal{C} = \{|\psi\rangle : A_v|\psi\rangle = |\psi\rangle, B_f|\psi\rangle = |\psi\rangle \ \forall v, f\}$ .



## Sob o Ponto de Vista de Homologia e Co-homologia



$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

- ▶  $V \Rightarrow$  0-cadeia  $\Rightarrow H_0 = \mathbb{Z}_2$
- ▶  $E \Rightarrow$  1-cadeia  $\Rightarrow H_1 = \mathbb{Z}_2^2$
- ▶  $F \Rightarrow$  2-cadeia  $\Rightarrow H_2 = \mathbb{Z}_2$

Seja  $R$  um anel comutativo com identidade. Um *complexo de cadeias* com coeficientes sobre  $R$  é uma sequência  $\mathcal{C} = (C_\rho, \partial_\rho)$  de  $R$ -módulos  $C_\rho$ , onde  $\rho$  é um inteiro positivo, e  $\partial_\rho : C_\rho \rightarrow C_{(\rho-1)}$  são homomorfismos tais que,  $\partial_\rho \circ \partial_{\rho+1} = 0$ .

- ▶  $\partial_\rho$  é chamado *operador bordo*.
- ▶  $c \in C_\rho$  é uma  $\rho$ -cadeia.
- ▶ Se  $\partial_\rho c = 0$ , diz-se que  $c$  é um *ciclo*.
- ▶ Se  $b = \partial_{(\rho+1)} c \in C_\rho$ , diz-se que  $b$  é o *bordo* da  $(\rho + 1)$ -cadeia  $c$ . Consequentemente, todo bordo é um ciclo.
- ▶ O *Grupo de Homologia* de dimensão  $\rho$  de  $\mathcal{C}$  com coeficientes sobre  $R$  é o  $R$ -módulo quociente

$$H_\rho = H_\rho(\mathcal{C}) = Z_\rho / B_\rho. \quad (2)$$

- ▶ Os elementos de  $H_\rho$  são classes de homologias de ciclos.

O número de qubits codificados é dado pelo número de geradores de  $H^1$  correspondendo às classes de homologia dos ciclos representados pelo paralelo e meridiano. Daí,  $k = 2$ .

É conveniente considerar  $X$  atuando nos qubits da tesselação dual e  $Z$  agindo nos qubits da tesselação original. Isso é consistente com as estruturas de  $H_1$  e  $H^1$ .

Dada uma 1-cadeia na tesselação (ou na dual), erros phase-shift são detectados quando as palavras estão no auto-espaço associado ao autovalor  $-1$  do operador  $Z_f$  (tesselação original), e erros bit-flip são detectados quando palavras estão no auto-espaço associado ao autovalor  $-1$  do operador  $X_v$  dos vértices da 1-cadeia (tesselação dual).

A porta de Hadamard  $H$  deve ser aplicada à cada qubit, uma vez que  $H^{\otimes |E|} X_v H^{\otimes |E|} = Z_v^*$  and  $H^{\otimes |E|} Z_f H^{\otimes |E|} = X_f^*$ , onde  $*$  indica a tesselação dual. Assim,  $Z$  erros e  $X$  erros podem ser tratados da mesma maneira. Erros em 1-cadeia equivalentes tem a mesma síndrome e são corrigidos na mesma forma.

Tais códigos não atingem o limitante de Hamming com igualdade, e só se conhece códigos quânticos topológicos MDS com distância 2.

Tais códigos não atingem o limitante de Hamming com igualdade, e só se conhece códigos quânticos topológicos MDS com distância 2.

A principal característica dos códigos topológicos é o contraste entre o caráter local dos geradores estabilizadores e os erros globais não detectáveis:

- ▶ Simplicidade dos geradores estabilizadores
- ▶ Distância do código aumenta à medida que o reticulado cresce.

Tais códigos não atingem o limitante de Hamming com igualdade, e só se conhece códigos quânticos topológicos MDS com distância 2.

A principal característica dos códigos topológicos é o contraste entre o caráter local dos geradores estabilizadores e os erros globais não detectáveis:

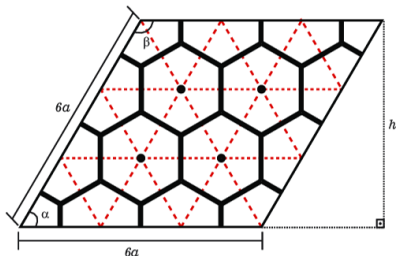
- ▶ Simplicidade dos geradores estabilizadores
- ▶ Distância do código aumenta à medida que o reticulado cresce.

## Correção no Nível Físico

Informação quântica é armazenada em graus de liberdade não-locais de sistemas físicos ordenados topologicamente.

- ▶ O estado base do Hamiltoniano  $H_0 = -\sum_v X_v - \sum_f Z_f$  coincide com o subespaço protegido do código, cujo grau de degeneração é  $4g$ .
- ▶ A violação da condição estabilizadora resulta em perda de energia.
- ▶ Os estados excitados são separados por um gap de energia devido à diferença entre os autovalores dos operadores estabilizadores .

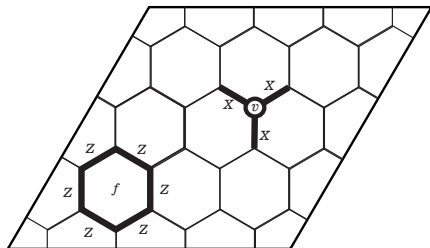
## Código Tórico no Reticulado Hexagonal



- ▶  $n_f = \frac{A_{P'}}{A_H} = 9$ , onde  $A_{P'} = 6a \cdot h$  e  $A_H$  é a área do hexágono.
- ▶  $n = n_f \frac{p}{2} = 27$  e  $k = 2$ .
- ▶  $d = \min\{d_{(6,3)}, d_{(3,6)}\}$ , onde  $d_{(6,3)} = \left\lceil \frac{d_e}{l(6,3)} \right\rceil = 6$  e  $d_{(3,6)} = \left\lceil \frac{d_e}{l(3,6)} \right\rceil = 3$ .



## Código Tórico no Reticulado Hexagonal



- ▶ Operadores Estabilizadores:  $A_v = \bigotimes_{j \in E_v} X^j$      $B_f = \bigotimes_{j \in E_f} Z^j$
- ▶ Código tórico hexagonal  $[[27, 2, 3]]$ .

## Códigos Poliminós

	0	1	2	3	4
0					x
1		x			
2				x	
3	x				
4			x		

	0	1	2	3	4
0					x
1		x			
2				x	
3	x				
4			x		

- ▶  $n$  é o número de arestas do poliminó,  $n = 2m$ , onde  $m = x^2 + y^2$  é a área do poliminó;
- ▶  $k = 2$ ;
- ▶  $d$  é a distância entre dois poliminós vizinhos,  $d = |x| + |y|$
- ▶  $[[2m, 2, d_M]]$
- ▶ Os operadores estabilizadores são definidos da mesma forma do código tórico original.

O formato do poliminó pode influenciar no padrão de correção de erro. ☰

## Códigos Poliminós

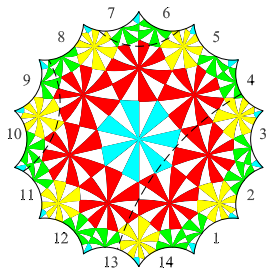
	0	1	2	3	4
0					x
1		x			
2				x	
3	x				
4			x		

	0	1	2	3	4
0					x
1		x			
2				x	
3	x				
4			x		

- ▶ Reticulado  $m \times m$  pode ser ladrilhado por  $m$  esferas de Lee de raio  $r = 1, 2, \dots$  se  $m = 2r^2 + 2r + 1$ .
- ▶ Esse subreticulado dá origem à classe de códigos  $[[d^2 + 1, 2, d]]$ .
- ▶  $m = x^2 + y^2$ , se  $x = y$ , então  $[[d^2, 2, d]]$ .
- ▶ Código MDS  $[[4, 2, 2]]$ .

## Generalização dos Códigos Tóricos para Superfícies com $g \geq 2$

- ▶ Modelo planar  $P'$  da superfície;
- ▶ Tesselações  $\{p, q\}$  de  $P'$ ;
- ▶ Parâmetros, operadores e códigos.



C. D. de Albuquerque, R. Palazzo Jr. and E. B. da Silva, "Topological quantum codes on compact surfaces with genus  $g \geq 2$ " J. Math. Phys., **50**, pp. 023513 (2009).

## Modelo Planar da Superfície

Uma superfície topológica compacta  $\mathbb{M}$  pode ser obtida de um polígono  $P'$  identificando seus lados em pares, uma vez que uma condição de lado e ângulo seja satisfeita

- (i) Para cada lado  $s$  de  $P'$  existe um único lado  $s'$  de  $P'$  tal que  $s' = \gamma(s)$ , onde  $\gamma$  é uma isometria de um grupo de isometria  $\Gamma$ ;
- (ii) Dado um emparelhamento de lados de  $P'$ , para cada ciclo de vértices (cadeia de identificações com vértices) a soma dos ângulos deve ser igual a  $2\pi$ .

## Modelo Planar da Superfície

Uma superfície topológica compacta  $\mathbb{M}$  pode ser obtida de um polígono  $P'$  identificando seus lados em pares, uma vez que uma condição de lado e ângulo seja satisfeita

- (i) Para cada lado  $s$  de  $P'$  existe um único lado  $s'$  de  $P'$  tal que  $s' = \gamma(s)$ , onde  $\gamma$  é uma isometria de um grupo de isometria  $\Gamma$ ;
- (ii) Dado um emparelhamento de lados de  $P'$ , para cada ciclo de vértices (cadeia de identificações com vértices) a soma dos ângulos deve ser igual a  $2\pi$ .

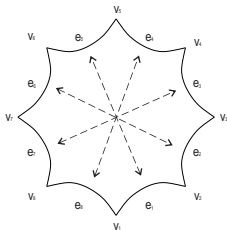
Uma superfície hiperbólica compacta pode ser distinguida topologicamente pelo gênero e geometricamente pela área do polígono

$$4\pi(g - 1).$$

## Modelo Planar e Tesselação

### Modelo planar $P'$ da superfície:

Face de uma tesselação  $\{4g, 4g\}$  com emparelhamento de lados opostos



### Tesselações $\{p, q\}$ de $P'$ :

$$n_f = \frac{4q(g-1)}{pq - 2p - 2q},$$

desde que  $n_f$  é um natural não nulo e  $(p-2)(q-2) > 4$ .

## Parâmetros

$$n = E = n_f \cdot \frac{p}{2}$$

Operadores Estabilizadores:

$$A_v = \bigotimes_{j \in E_v} X^j \quad B_f = \bigotimes_{j \in E_f} Z^j.$$

- ▶ Tem-se  $n_f + n_v - 2$  geradores do grupo estabilizador.
- ▶ Característica de Euler:  $X = V - E + F = 2 - 2g$
- ▶ Assim,

$$n - k = n_f + n_v - 2$$

$$k = n - n_f - n_v + 2$$

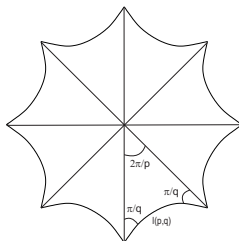
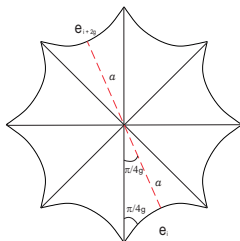
$$k = E - F - V + 2$$

$$k = -(2 - 2g) + 2$$

$$k = 2g$$

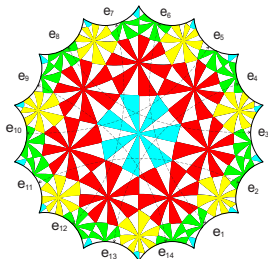


## Distância do Código



$$d = \left\lceil \frac{2 \operatorname{arccosh} \left[ \frac{\cos(\pi/4g)}{\sin(\pi/4g)} \right]}{\operatorname{arccosh} \left[ \frac{\cos^2(\pi/q) + \cos(2\pi/p)}{\sin^2(\pi/q)} \right]} \right\rceil.$$

## Exemplo



- ▶ Modelo planar  $\{4g + 2, 2g + 1\}$ :  $14 - gon$  com  $g = 3$ ;
- ▶ Emparelhamento dado por  $s_{2i+1} \rightarrow s_{2i+6}$ ;
- ▶ Tesselação  $\{7, 3\}$ ;
- ▶  $n_f = 24$  e  $n_v = 56$ ;
- ▶ Parâmetros  $n = 84$ ,  $k = 6$  e  $d = 4$ .
- ▶  $[[84, 6, 4]]$

Tessellations and Parameters of the Topological Quantum Codes for  $g = 2$ 

$\{p, q\}$	$n_f$	$l(p, q)$	$d_h/l(p, q)$	$[[n, k, d_{TQC}]]$
<b><math>\{3, 7\}</math></b>	<b>28</b>	<b>1.0906</b>	<b>2.8033</b>	
<b><math>\{7, 3\}</math></b>	<b>12</b>	<b>0.5663</b>	<b>5.3989</b>	<b><math>[[42, 4, 3]]</math></b>
$\{3, 8\}$	16	1.5286	2	
$\{8, 3\}$	6	0.7270	4.2049	$[[24, 4, 2]]$
$\{3, 9\}$	12	1.8551	1.6480	
$\{9, 3\}$	4	0.8192	3.7319	$[[18, 4, 2]]$
<b><math>\{4, 5\}</math></b>	<b>10</b>	<b>1.2537</b>	<b>2.4384</b>	
<b><math>\{5, 4\}</math></b>	<b>8</b>	<b>1.0613</b>	<b>2.8806</b>	<b><math>[[20, 4, 3]]</math></b>
$\{4, 6\}$	6	1.7628	1.7343	
$\{6, 4\}$	4	1.3170	2.3214	$[[12, 4, 2]]$
$\{4, 8\}$	4	2.4485	1.2486	
$\{8, 4\}$	2	1.5286	2	$[[8, 4, 2]]$
$\{5, 5\}$	4	1.6850	1.8144	$[[10, 4, 2]]$
$\{6, 6\}$	2	2.2924	1.3336	$[[6, 4, 2]]$

Tessellations and Parameters of the Topological Quantum Codes for  $g = 3$ 

$\{p, q\}$	$n_f$	$l(p, q)$	$d_h/l(p, q)$	$[[n, k, d_{TQC}]]$
<b>{3,7}</b>	<b>56</b>	<b>1.0906</b>	<b>3.6526</b>	
<b>{7,3}</b>	<b>24</b>	<b>0.5663</b>	<b>7.0347</b>	<b>[[84,6,4]]</b>
<b>{3,8}</b>	<b>32</b>	<b>1.5286</b>	<b>2.6059</b>	
<b>{8,3}</b>	<b>12</b>	<b>0.7270</b>	<b>5.4788</b>	<b>[[48,6,3]]</b>
<b>{3,9}</b>	<b>24</b>	<b>1.8551</b>	<b>2.1472</b>	
<b>{9,3}</b>	<b>8</b>	<b>0.8192</b>	<b>4.8625</b>	<b>[[36,6,3]]</b>
<b>{4,5}</b>	<b>20</b>	<b>1.2537</b>	<b>3.1771</b>	
<b>{5,4}</b>	<b>16</b>	<b>1.0613</b>	<b>3.7533</b>	<b>[[40,6,4]]</b>
<b>{4,6}</b>	<b>12</b>	<b>1.7628</b>	<b>2.2597</b>	
<b>{6,4}</b>	<b>8</b>	<b>1.3170</b>	<b>3.0246</b>	<b>[[24,6,3]]</b>
<b>{5,5}</b>	<b>8</b>	<b>1.6850</b>	<b>2.3640</b>	<b>[[20,6,3]]</b>
<b>{6,6}</b>	<b>4</b>	<b>2.2924</b>	<b>1.7376</b>	<b>[[12,6,2]]</b>
<b>{8,8}</b>	<b>2</b>	<b>3.0571</b>	<b>1.3030</b>	<b>[[8,6,2]]</b>

## Códigos $g$ -Tóricos MDS

No caso  $g = 1$  com  $[[d^2, 2, d]]$  para  $d = 2$ , temos o código MDS  $[[4, 2, 2]]$ .

## Códigos $g$ -Tóricos MDS

No caso  $g = 1$  com  $[[d^2, 2, d]]$  para  $d = 2$ , temos o código MDS  $[[4, 2, 2]]$ .

Para  $p = q = 2(g + 1)$  e para cada  $g = 2, 3, 4, \dots$ , temos que  $n_f = 2$  e  $d = 2$ . Obtendo assim, a família  $[[2g + 2, 2g, 2]]$  de códigos quânticos topológicos MDS.

## Códigos $g$ -Tóricos MDS

No caso  $g = 1$  com  $[[d^2, 2, d]]$  para  $d = 2$ , temos o código MDS  $[[4, 2, 2]]$ .

Para  $p = q = 2(g + 1)$  e para cada  $g = 2, 3, 4, \dots$ , temos que  $n_f = 2$  e  $d = 2$ . Obtendo assim, a família  $[[2g + 2, 2g, 2]]$  de códigos quânticos topológicos MDS.

Recentemente, Vandenberg Lopes Vieira e Orlando Stanley Juriaans, provaram que:

- ▶ Dado um código quântico topológico  $C = [[n, 2g, d]]$  obtido do modelo planar  $\{4g, 4g\}$ . Se  $C$  é um código MDS, então  $d \leq 2$ .
- ▶ Seja  $C$  um código quântico topológico obtido de outro modelo planar  $\{p', q'\}$ , onde  $p'$  é par, e seja  $d$  a distância mínima de  $C$ . Se  $C$  é um código MDS, então  $d \leq 2$ .

## Códigos Coloridos

**Color Codes:** proposto por Bombin e Martin-Delgado em 2006 (PRL), *Topological quantum distillation*.

Permite a implementação transversal de todo o grupo de Clifford de portas lógicas

- ▶  $X$ ,  $Z$  e CNOT,
- ▶ Hadamard e  $\frac{\pi}{4}$  phase-shift.

Suficiente para realizar protocolos de destilação e teleportação, e portanto, realizar computação universal.

Color codes preservam boas propriedades de localidade, distância crescente e a realização de computação quântica tolerante a falhas.

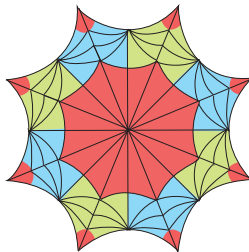
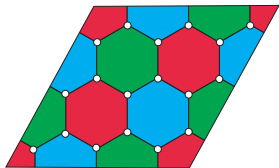
Generalização para  $g \geq 2$ :

W.S. Soares Jr and E.B. da Silva (2018), *Hyperbolic quantum color codes*, QIC, 18(3&4) : 0307.



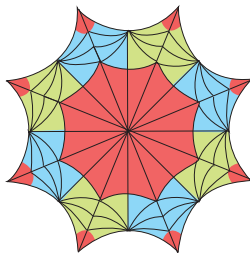
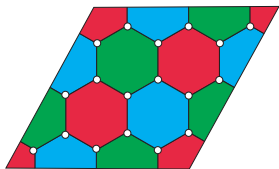
Os color codes são construídos sobre tesselações  $\{p, q\}$  de um modelo planar  $P'$  de uma superfície de gênero  $g$ , tais que a tesselação seja

- ▶ trivalente  $\longleftrightarrow q = 3$ ;
- ▶ 3-colorida  $\longleftrightarrow p$  é par.



Os color codes são construídos sobre tesselações  $\{p, q\}$  de um modelo planar  $P'$  de uma superfície de gênero  $g$ , tais que a tesselação seja

- ▶ trivalente  $\longleftrightarrow q = 3$ ;
- ▶ 3-colorida  $\longleftrightarrow p$  é par.



- ▶ Qubits  $\longleftrightarrow$  vértices da tesselação. Daí,  $n = V$ .
- ▶ Operadores estabilizadores associados às faces da tesselação:

$$B_f^X = \bigotimes_{i \in f} X_i \quad B_f^Z = \bigotimes_{i \in f} Z_i$$

Considere o modelo planar  $P' = \{4g, 4g\}$  de uma superfície compacta orientável de gênero  $g$ , com transformação de emparelhamento de lados opostos, e  $\{p, q\}$  uma tesselação regular de  $P'$ , temos:

- ▶  $\{p, q\}$  trivalente  $\Rightarrow q = 3$ ;
- ▶  $\{p, q\}$  3-colorida  $\Rightarrow p$  é par.

Considere o modelo planar  $P' = \{4g, 4g\}$  de uma superfície compacta orientável de gênero  $g$ , com transformação de emparelhamento de lados opostos, e  $\{p, q\}$  uma tesselação regular de  $P'$ , temos:

- ▶  $\{p, q\}$  trivalente  $\Rightarrow q = 3$ ;
- ▶  $\{p, q\}$  3-colorida  $\Rightarrow p$  é par.

Se  $g = 1$ , a única tesselação regular que atende tais condições é  $\{6, 3\}$ .

Para  $g \geq 2$ , existem infinitas tesselações regulares  $\{p, 3\}$ , com  $p$  par.

Considere o modelo planar  $P' = \{4g, 4g\}$  de uma superfície compacta orientável de gênero  $g$ , com transformação de emparelhamento de lados opostos, e  $\{p, q\}$  uma tesselação regular de  $P'$ , temos:

- ▶  $\{p, q\}$  trivalente  $\Rightarrow q = 3$ ;
- ▶  $\{p, q\}$  3-colorida  $\Rightarrow p$  é par.

Se  $g = 1$ , a única tesselação regular que atende tais condições é  $\{6, 3\}$ .

Para  $g \geq 2$ , existem infinitas tesselações regulares  $\{p, 3\}$ , com  $p$  par.

Neste caso

- ▶  $(p - 2)(q - 2) > 4$
- ▶  $n_f = \frac{12(g-1)}{p-6}$ ,  $p > 6$
- ▶  $3 \mid n_f$
- ▶  $n = V = n_f \frac{p}{3}$ .

Separando as faces da tesselação de acordo com a cor, temos

$$\prod_{p \in R} B_p^\sigma = \prod_{p \in Y} B_p^\sigma = \prod_{p \in B} B_p^\sigma, \quad \sigma = X, Z. \quad (3)$$

Daí, quatro operadores são descartados, deixando  $2F - 4$  geradores, onde  $F$  é o número de faces da tesselação. Assim,

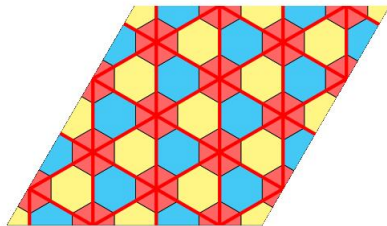
$$\begin{aligned} n - k &= 2F - 4 \\ k &= V - 2F + 4 \\ k &= -2\chi + 4 \\ k &= 4g \end{aligned} \quad (4)$$

onde  $\chi = V - E + F$ ,  $E = \frac{3V}{2}$  e  $\chi = 2 - 2g$ .

$k$  depende apenas do gênero da superfície e não da escolha da tesselação.

**Shrunk Lattice:** considerando na tesselação as faces de uma mesma cor, e conectando tais faces por novas arestas, obtemos uma tesselação triangular. Existe uma shrunk lattice para cada cor.

Cada nova aresta corresponde a dois vértices na tesselação original, e as faces das outras duas cores correspondem à faces na nova tesselação.



$$d = 2 \left[ \frac{2 \operatorname{arccosh} \left[ \frac{\cos(\pi/4g)}{\sin(\pi/4g)} \right]}{\operatorname{arccosh} \left[ \frac{\cos^2(\pi/3) + \cos(2\pi/p)}{\sin^2(\pi/3)} \right] + 2 \operatorname{arccosh} \left[ \frac{\cos(\pi/p) \cos(\pi/3)}{\sin(\pi/p) \sin(\pi/3)} \right]} \right].$$

$$\blacktriangleright n_f = \frac{12(g-1)}{p-6}, \quad p > 6 \text{ e } 3 \mid n_f$$

$$\blacktriangleright n = V = n_f \frac{p}{3}$$

$$\blacktriangleright k = 4g$$

$$\blacktriangleright d = 2 \left[ \frac{2 \operatorname{arccosh} \left[ \frac{\cos(\pi/4g)}{\sin(\pi/4g)} \right]}{\operatorname{arccosh} \left[ \frac{\cos^2(\pi/3) + \cos(2\pi/p)}{\sin^2(\pi/3)} \right] + 2 \operatorname{arccosh} \left[ \frac{\cos(\pi/p) \cos(\pi/3)}{\sin(\pi/p) \sin(\pi/3)} \right]} \right]$$

$$\blacktriangleright B_f^X = \bigotimes_{i \in f} X_i \quad B_f^Z = \bigotimes_{i \in f} Z_i$$

$$\blacktriangleright \mathcal{C} = \{ |\psi\rangle : B_f^X |\psi\rangle = |\psi\rangle, B_f^Z |\psi\rangle = |\psi\rangle \quad \forall f \}$$



## Classe de códigos associada a tesselação $\{8, 3\}$

- ▶ Parâmetros:  $[[16(g - 1), 4g, d]]$
- ▶ Taxa de Codificação:  $\frac{k}{n} \rightarrow \frac{1}{4}$

$\{p, q\}$	$g$	$n_f$	$[[n, k, d]]$
$\{8, 3\}$	2	6	$[[16, 8, 4]]$
$\{8, 3\}$	3	12	$[[32, 12, 4]]$
$\{8, 3\}$	4	18	$[[48, 16, 4]]$
$\{8, 3\}$	5	24	$[[64, 20, 6]]$

## Classe de códigos associada a tesselação $\{10, 3\}$

- ▶ Parâmetros:  $[[10(g - 1), 4g, d]]$
- ▶ Taxa de Codificação:  $\frac{k}{n} \rightarrow \frac{2}{5}$

$\{p, q\}$	$g$	$n_f$	$[[n, k, d]]$
$\{10, 3\}$	2	3	$[[10, 8, 2]]$
$\{10, 3\}$	3	6	$[[20, 12, 4]]$
$\{10, 3\}$	4	9	$[[30, 16, 4]]$
$\{10, 3\}$	5	12	$[[40, 20, 4]]$

## Classe de códigos associada a tesselação $\{12, 3\}$

- ▶ Parâmetros:  $[[8(g - 1), 4g, d]]$  para  $g \equiv 1 \pmod 3$
- ▶ Taxa de Codificação:  $\frac{k}{n} \rightarrow \frac{1}{2}$

$\{p, q\}$	$g$	$n_f$	$[[n, k, d]]$
$\{12, 3\}$	4	6	$[[24, 16, 4]]$
$\{12, 3\}$	7	12	$[[48, 28, 4]]$

## Classe de códigos associada a tesselação $\{14, 3\}$

- ▶ Parâmetros:  $[[7(g - 1), 4g, d]]$  para  $g \equiv 1 \pmod 2$
- ▶ Taxa de Codificação:  $\frac{k}{n} \rightarrow \frac{4}{7}$

$\{p, q\}$	$g$	$n_f$	$[[n, k, d]]$
$\{14, 3\}$	3	3	$[[14, 12, 2]]$
$\{14, 3\}$	5	6	$[[28, 20, 4]]$
$\{14, 3\}$	7	9	$[[42, 28, 4]]$

# Classe de códigos associados às tesselações $\{12i - 6, 3\}$

Tesselação  $\{18, 3\}$ :

►  $[[6(g - 1), 4g, d]]$  e  $\frac{k}{n} \rightarrow \frac{2}{3}$

## Classe de códigos associados às tesselações $\{12i - 6, 3\}$

Tesselação  $\{18, 3\}$ :

▶  $[[6(g - 1), 4g, d]]$  e  $\frac{k}{n} \rightarrow \frac{2}{3}$

Tesselação  $\{30, 3\}$ :

▶  $[[5(g - 1), 4g, d]]$  e  $\frac{k}{n} \rightarrow \frac{4}{5}$

## Classe de códigos associados às tesselações $\{12i - 6, 3\}$

Tesselação  $\{18, 3\}$ :

▶  $[[6(g - 1), 4g, d]]$  e  $\frac{k}{n} \rightarrow \frac{2}{3}$

Tesselação  $\{30, 3\}$ :

▶  $[[5(g - 1), 4g, d]]$  e  $\frac{k}{n} \rightarrow \frac{4}{5}$

Tesselação  $\{42, 3\}$ :

▶  $[[\frac{14}{3}(g - 1), 4g, d]]$  e  $\frac{k}{n} \rightarrow \frac{6}{7}$

## Classe de códigos associados às tesselações $\{12i - 6, 3\}$

Tesselação  $\{18, 3\}$ :

▶  $[[6(g - 1), 4g, d]]$  e  $\frac{k}{n} \rightarrow \frac{2}{3}$

Tesselação  $\{30, 3\}$ :

▶  $[[5(g - 1), 4g, d]]$  e  $\frac{k}{n} \rightarrow \frac{4}{5}$

Tesselação  $\{42, 3\}$ :

▶  $[[\frac{14}{3}(g - 1), 4g, d]]$  e  $\frac{k}{n} \rightarrow \frac{6}{7}$

**Caso geral:**  $[[\frac{6+12i}{3(i-1)}(g - 1), 4g, d]]$  com  $\frac{k}{n} \rightarrow 1$



## Códigos Coloridos MDS

Considere um color code  $[[n, k, d]]$  obtido a partir do modelo planar  $\{4g, 4g\}$  tal que  $k = n - 2d + 2$ . Substituindo:

$$\blacktriangleright n = n_f \cdot \frac{p}{3}$$

$$\blacktriangleright k = 4g$$

$$\blacktriangleright n_f = \frac{12(g-1)}{p-6}$$

Temos

$$p = \frac{12g + 6d - 6}{d + 1}$$

Mostra-se que  $d \leq 2$ . Como  $d$  é par, segue que  $d = 2$ .

C. D. de Albuquerque, V. L. Vieira, C. R. de O. Q. Queiroz, G. G. La Guardia, A. J. de Oliveira and L. B. de Lima (2021), *On MDS Color Codes*, Physica A, 599 : 127433, 2022.

## Códigos Coloridos MDS

Se  $[[n, k, d]]$  é um código colorido MDS derivado de uma tesselação  $\{p, 3\}$ , então  $p = 4g + 2$ .

Para todo  $g \in \mathbb{N}$ , existe um código colorido MDS  $[[n, n - 2, 2]]$ , onde  $n = 4g + 2$ .

Única classe de código colorido MDS é  $[[4g + 2, 4g, 2]]$  derivada da tesselação  $\{4g + 2, 3\}$  do modelo planar  $4g$ -gon de uma superfície de gênero  $g$ .

### Códigos Coloridos MDS

$g$	$\{p, q\}$	$n_f$	$[[n, k, d]]$
2	$\{10, 3\}$	3	$[[10, 8, 2]]$
3	$\{14, 3\}$	3	$[[14, 12, 2]]$
4	$\{18, 3\}$	3	$[[18, 16, 2]]$
5	$\{22, 3\}$	3	$[[22, 20, 2]]$
6	$\{26, 3\}$	3	$[[26, 24, 2]]$

## Agradecimentos

