IDENTIFICAÇÃO DE GRUPOS FUCHSIANOS ARITMÉTICOS EM ORDENS DOS QUATÉRNIOS COM APLICAÇÕES NA CONSTRUÇÃO DE CÓDIGOS QUÂNTICOS TOPOLÓGICOS

RAFAEL FERREIRA CARDOSO[1], **CÁTIA REGINA DE OLIVEIRA QUILLES QUEIROZ**[2]

Universidade Federal de Alfenas, MG, Brasil

rafael.cardoso@sou.unifal-mg.edu.br[1], catia.quilles@unifal-mg.edu.br[2]

Resumo

Neste trabalho, objetivamos a identificação de grupos fuschsianos aritméticos em ordens dos quatérnios, por meio das tesselações hiperbólicas auto-duais $\{4g, 4g\}$, afim de compreender com maior clareza as isometrias que pareiam os lados de um polígono hiperbólico. Vimos ainda uma condição necessária para a construção de grupos fuchsianos aritméticos e estudamos um algoritmo para obter os geradores deste tipo de grupo.

Palavras-Chave: polígonos hiperbólicos; rotulamento algébrico; tesselações hiperbólicas.

Introdução

O presente trabalho aborda a identificação de grupos fuchsianos aritméticos que são formados por isometrias que fazem o pareamentos dos lados de um polígono hiperbólico, em ordens dos quatérnios, que tem como uma de suas propostas a aplicação da Matemática no estudo da teoria de códigos corretores de erros, que são capazes de detectar e corrigir erros que possam surgir durante a transmissão ou armazenamento de dados, visando ainda a construção algébrica de códigos quânticos topológicos, conforme realizado geometricamente em [1].

Objetivos

Com este trabalho, objetiva-se a identificação de grupos fuchsianos aritméticos em ordem dos quatérnios, as quais serão necessárias para a construção algébrica de códigos quânticos topológicos. Sumariamente, este trabalho tem a intenção de:

- analisar tesselações hiperbólicas e as isometrias que fazem o pareamento dos lados destes polígonos;
- estudar os grupos fuschsianos aritméticos;
- explorar as construções de códigos quânticos topológicos.

Fundamentação Teórica

As teorizações que serão apresentadas neste trabalho consistem em uma revisão bibliográfica de [3], onde nos deparamos com tópicos independentes de suma importância para a compreensão do todo, são eles: a álgebra quaterniônica, que possui uma forte caracteriação em [4], os grupos fuchsianos, caracterizados por [2], as tesselações hiperbólicas, delineadas em [5], dentre outros, que quando correlacionados caminham para os resultados esperados das constelações para códigos quânticos topológicos propostos em [1].

Desenvolvimento e Metodologia

A álgebra dos quatérnios, que denotaremos por $\mathbb{A}$, é dotada de três unidades imaginárias que podem ser associadas a um espaço tridimensional. Portanto, elas podem ser interpretadas a partir daí como números regidos por uma parte escalar e outra vetorial determinada pelos coeficientes das unidades imaginárias que denominaremos i, j e k. Em linhas gerais, adotamos para qualquer $q \in \mathbb{A}$, $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ onde $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$.

Definição 1. *Seja K um corpo. Uma álgebra $\mathfrak{B}$ sobre K é um espaço vetorial com uma estrutura de anel com identidade $1_{\mathfrak{B}}$, cujas operações de multiplicação do anel e por escalar são relacionadas por*

$$a(xy) = (ax)y = x(ay), \quad \forall\, a \in K \quad e \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{B}. \tag{1}$$

Conforme [3] veremos a definição de grupos fuchsianos apoiada pela teoria de grupos lineares e discretos.

Definição 2. *Um grupo é chamado de* ***grupo fuchsiano*** *se ele for um subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$.*

Resultados

Nesta seção identificamos os grupos Fuchsianos aritméticos Γ_{4g} derivados de uma álgebra dos quatérnios $\mathcal{A}$ sobre um corpo de números $\mathbb{K}$, onde $g = 2.2^n, 3.2^n, 5.2^n$ e $3.5.2^n$, para $n \geq 0$, denota o gênero da superfície $\mathbb{D}^2/\Gamma_{4g}$ em uma ordem dos quatérnios.

Teorema 1. *[3] Para cada g e $n \geq 0$, o grupo Fuchsiano aritmético Γ_{4g} é derivado de uma álgebra dos quatérnios $\mathcal{A}$ sobre um corpo de números totalmente real $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\theta)$ e os elementos de Γ_{4g} são identificados, por um isomorfismo, com os elementos da ordem $\mathcal{O} = (\theta, -1)_{I_{\mathbb{K}}}$, onde $I_{\mathbb{K}}$ denota o anel de inteiros de $\mathbb{K}$ e θ é dado por:*

1. $\theta = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$, *contendo $n+1$ raizes, para $g = 2.2^n$;*
2. $\theta = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$, *contendo $n+1$ raizes, para $g = 3.2^{n+1}$;*
3. $\theta = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}}}}$, *contendo $n+2$ raizes, para $g = 5.2^{n+1}$;*
4. $\theta = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{7+\sqrt{5}+\frac{\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{2}}}}$, *contendo $n+4$ raizes, para $g = 3.5.2^n$.*

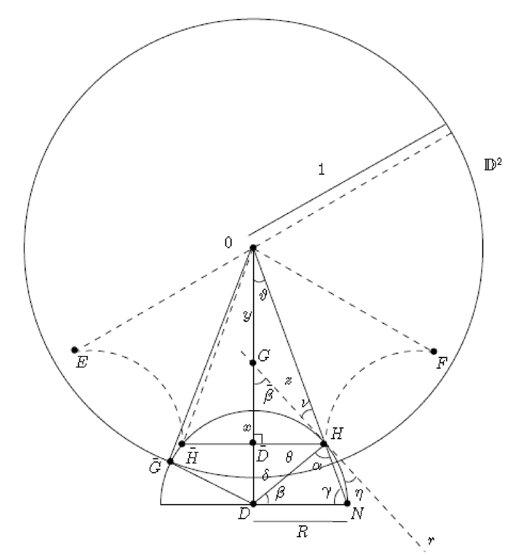

Figura 1: Triângulo $\{4g, 4g\}$.

Conclusões

Portanto, este trabalho nos permitiu revisar os estudos sobre o tema, a partir da visitação dos temas independentes, tais como a álgebra do quatérnios, as tesselações e os grupos fuchsianos aritméticos. Os tópicos desenvolvidos nos permitirão adentrar nas construções de códigos quânticos.

Referências

[1] C.D. Albuquerque. *Análise e Construção de Códigos Quânticos Topológicos sobre Variedades Bidimensionais*. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2009.

[2] S. Katok. Fuchsian Groups. *The University of Chicago Press*, 1992.

[3] V. L. Vieira. *Grupos Fuchsianos Aritiméticos Identicados em Ordens dos Quatérnios para Construção de Constelações de Sinais*. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2007.

[4] J. Voight. *Quaternion algebras*. Versão 0.9.21. Disponível em: https://math.dartmouth.edu/ jvoight/quat-book.pdf. Acesso em: 22 de julho de 2020.

[5] C. Walkden. *Hyperbolic Geometry*. Manchester University, 2019.

Agradecimentos

Agradecemos à Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação (PRPPG) da UNIFAL-MG pelo apoio e financiamento por meio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PROBIC).